



## 第四章

## 指数函数与对数函数

## 4.1 指数

4.1.1  $n$  次方根与分数指数幂

## 4.1.2 无理数指数幂及其运算性质



## 基础上分

1. B 【解析】由题意可得  $a - 2\,023 \geq 0$ , 解得  $a \geq 2\,023$ , 则  $a - 2\,022 + \sqrt{a - 2\,023} = a$ , 所以  $\sqrt{a - 2\,023} = 2\,022$ , 则  $a - 2\,023 = 2\,022^2$ , 所以  $a - 2\,022^2 = 2\,023$ , 故 B 正确.

2. D 【解析】对于 A,  $\sqrt[6]{(-6)^2} = \sqrt[3]{6} > 0$ ,  $\sqrt[3]{-6} < 0$ , 所以 A 错误; 对于 B,  $\sqrt{(3-\pi)^2} = |3-\pi| = \pi-3$ , 所以 B 错误; 对于 C, 当  $n$  为奇数时,  $\sqrt[n]{a^n} = a (n > 1, n \in \mathbf{N}^*)$ , 所以 C 错误; 对于 D,  $(\sqrt[n]{a})^n = a (n > 1, n \in \mathbf{N}^*)$ , 所以 D 正确.

## 易错警示

对于  $\sqrt[n]{a^n}$ , 其结果需要根据  $n$  的奇偶来判断, 若  $n$  为奇数, 则  $\sqrt[n]{a^n} = a$ ; 若  $n$  为偶数, 则  $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ .

3. D 【解析】由  $(1-2x)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{(1-2x)^3}}$ , 所以  $1-2x > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$ , 所以  $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ .

4. A 【解析】 $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}} = \sqrt[4]{a \cdot a^{\frac{1}{3}}} = (a^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{3}}$ . 故选 A.

5. B 【解析】 $a^{\frac{2m+3n}{2}} = a^m \cdot a^{\frac{3n}{2}} = 3(a^n)^{\frac{3}{2}} = 3 \times 4^{\frac{3}{2}} = 24$ . 故选 B.

6. C 【解析】设植物原来长度为  $m$ , 经过 8 天后, 该植物的长度是原来的  $\frac{3}{2}$  倍,

故  $m(1+a\%)^8 = \frac{3}{2}m$ , 即  $(1+a\%)^8 = \frac{3}{2}$ , 即

$$1+a\% = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{8}}.$$

24 天后该植物的长度是  $m(1+a\%)^{24}$ , 即为原来的  $(1+a\%)^{24}$  倍, 则  $(1+a\%)^{24} =$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{8} \times 24} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}, \text{ 即 24 天后该植物}$$

的长度是原来的  $\frac{27}{8}$  倍, 故选 C.

7. D 【解析】 $\sqrt[a]{9} \times \sqrt[b]{27} = 3^{\frac{2}{a}} \times 3^{\frac{3}{b}} = 3^{\frac{2}{a} + \frac{3}{b}} = 3$ ,



所以  $\frac{2}{a} + \frac{3}{b} = 1$ , 因为  $a, b$  为正数, 所以

$$3a + 2b = (3a + 2b) \left( \frac{2}{a} + \frac{3}{b} \right) = 12 + \frac{4b}{a} +$$

$$\frac{9a}{b} \geq 12 + 2\sqrt{\frac{4b}{a} \times \frac{9a}{b}} = 24, \text{ 当且仅当 } \frac{4b}{a} =$$

$$\frac{9a}{b}, \text{ 即 } a = 4, b = 6 \text{ 时, 等号成立, 所以 } 3a +$$

$2b$  的最小值为 24.

8.  $\frac{35}{8} + \pi$  【解析】原式  $= 4 + \pi - 3 + \left(\frac{3}{2}\right)^{4 \times \frac{3}{4}} =$   
 $1 + \pi + \frac{27}{8} = \frac{35}{8} + \pi.$

9.  $\frac{5}{2}$  【解析】将  $a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = 1$  左右两边分别平方得  $a + a^{-1} - 2 = 1$ , 即  $a + a^{-1} = 3$ , 又  $(a + a^{-1})^2 = a^2 + a^{-2} + 2$ , 则  $\frac{a^2 + a^{-2} + 3}{a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}}} =$

$$\frac{(a + a^{-1})^2 - 2 + 3}{(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})(a + 1 + a^{-1})} = \frac{3^2 + 1}{1 \times (3 + 1)} = \frac{5}{2}.$$

10.  $a$  【解析】 $\because a > 0, b > 0$ ,

$$\therefore \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b^{13}}} \cdot (a^{2-\sqrt{3}}b)^{2+\sqrt{3}} \cdot b^{2-\sqrt{3}} = \frac{b^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{13}{3}}} \cdot$$

$$a^{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} \cdot b^{(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})} = b^{\frac{1}{3}-\frac{13}{3}} ab^4 = a.$$

11. 18 【解析】 $(3^{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2^{\sqrt{2}}})^{\sqrt{2}} = (3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} \times$   
 $(2^{\frac{\sqrt{2}}{2}})^{\sqrt{2}} = 3^2 \times 2^1 = 18.$



### 对点上分

1. A 【解析】 $\because \frac{1}{1-a} \geq 0, \therefore 1-a > 0$ , 即  $a -$   
 $1 < 0$ ,

$$\therefore (a-1) \cdot \sqrt{\frac{1}{1-a}} = -(1-a) \cdot \sqrt{\frac{1}{1-a}}$$

$$= -\sqrt{(1-a)^2} \times \sqrt{\frac{1}{1-a}}$$

$$= -\sqrt{(1-a)^2 \times \frac{1}{1-a}} = -\sqrt{1-a}.$$

故选 A.

2. C 【解析】原式  $= \frac{3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} +$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{3 \times (-\frac{1}{3})} + 2 - \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} + 10 + 2 - \sqrt{3} = 12,$$

故 C 正确.

3. D 【解析】 $2^{a+2b-1} = 2^a \times 2^{2b} \times \frac{1}{2} = 4^{\frac{1}{2}a} \times 2^{2b} \times$

$$\frac{1}{2} = (4^a)^{\frac{1}{2}} \times (2^b)^2 \times \frac{1}{2} = 3 \times 36 \times \frac{1}{2} = 54.$$



4. ACD 【解析】对于 A:  $-\sqrt[3]{x} = -x^{\frac{1}{3}} = (-x)^{\frac{1}{3}}$ , A 选项正确;

对于 B: 当  $x = -1$  时,  $\sqrt{x^2} = 1 \neq -1$ , B 选项不正确;

对于 C: 当  $x > 0$  时,  $x^{-\frac{3}{4}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{x}\right)^3}$ , C 选项正确;

对于 D: 当  $x > 0$  时,  $[\sqrt[3]{(-x)^2}]^{\frac{3}{4}} = (x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{1}{2}}$ , D 选项正确. 故选 ACD.

5. 110 【解析】原式  $= 2 \times \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 + (2^3)^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{4}} + \left(2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{2}}\right)^6 = 2 \times \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}} - 1 + 2^{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} + 2^2 \times 3^3 = 2 \times \frac{1}{2} - 1 + 2 + 4 \times 27 = 110$ .

6. 【解】(1)  $[(0.064^{\frac{1}{5}})^{-2.5}]^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{\frac{27}{8}} - \pi^0 = \left(\frac{2}{5}\right)^{3 \times \frac{1}{5} \times (-2.5) \times \frac{2}{3}} - \left(\frac{3}{2}\right)^{3 \times \frac{1}{3}} - 1 = \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} - 1 = 0$ .

(2)  $\frac{\sqrt{a^3 b^2} \sqrt[3]{ab^2}}{(a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{2}})^4 a^{-\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}} = \frac{(a^3 b^2 a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{ab^2 a^{-\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{5}{3} - \frac{2}{3}} b^{\frac{4}{3} - \frac{7}{3}} = ab^{-1} = \frac{a}{b}$ .

7. D 【解析】因为  $3a + b = 4$ , 所以  $8^a + 2^b = 2^{3a} + 2^b \geq 2 \sqrt{2^{3a} \cdot 2^b} = 2 \sqrt{2^{3a+b}} = 2 \sqrt{2^4} = 8$ , 当且仅当  $2^{3a} = 2^b$  即  $3a = b = 2$  时等号成立, 故选 D.

8.  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$  【解析】由  $9^k + 12^k = 16^k$  可得  $3^{2k} + 3^k \times 4^k = 4^{2k}$ , 即  $\left(\frac{3}{4}\right)^{2k} + \left(\frac{3}{4}\right)^k - 1 = 0$ , 又  $\left(\frac{3}{4}\right)^k > 0$ , 令  $t = \left(\frac{3}{4}\right)^k$ , 则  $t^2 + t - 1 = 0$ , 解得  $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ , 即  $\left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ .

9. 【解】(1) 若  $a^{2x} = 3$ , 则  $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{a^{4x} + a^{-2x}}{a^{2x} + 1} = \frac{3^2 + 3^{-1}}{3 + 1} = \frac{7}{3}$ .

(2) 由  $5^{2m} + 5^{2n} = (5^m + 5^n)^2 - 2 \cdot 5^m \cdot 5^n = (5^m + 5^n)^2 - 2 \cdot 5^{m+n} = 49 - 12 = 37$ ,

$5^{-m} + 5^{-n} = \frac{1}{5^m} + \frac{1}{5^n} = \frac{5^m + 5^n}{5^m \cdot 5^n} = \frac{5^m + 5^n}{5^{m+n}} = \frac{7}{6}$ ,



$$\text{得 } \frac{5^{2m} + 5^{2n} - 2}{5^{-m} + 5^{-n} + 2} = \frac{37-2}{\frac{7}{6}+2} = \frac{35}{\frac{19}{6}} = \frac{210}{19}.$$

## 4.2 指数函数

### 4.2.1 指数函数的概念



#### 基础上分

1. C 【解析】形如  $y = a^x$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ) 的函数为指数函数,  $y = 2 \cdot 3^x$  中  $3^x$  的系数不为 1, 故 A 错误;

$y = 3^{x+1}$  的指数不是  $x$ , 故 B 错误;

$y = x^3$  是幂函数, 故 D 错误;

只有  $y = 3^x$  符合指数函数的定义, 故 C 正确.

**易错警示** 忽略指数函数的特征而出错

判断指数函数时要注意以下几点: ①底数  $a$  为大于 0 且不等于 1 的常数; ②指数位置是自变量  $x$ , 且  $x$  的系数是 1; ③  $a^x$  的系数是 1.

2. B 【解析】由题意可知, 
$$\begin{cases} a^2 - 5a + 7 = 1, \\ 6 - 2a = 0, \end{cases}$$

解得  $a = 3$ , 故 B 正确.

3. D 【解析】函数  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x, & x \leq 0, \end{cases}$

则  $f(-4) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$ , 所以  $f(f(-4)) = f(16) = \sqrt{16} = 4$ . 故选 D.

4. 【解】(1) 由题知,  $f(x) = a^x$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ) 的图象过点  $(2, 4)$ , 所以  $f(2) = a^2 = 4$ , 所以  $a = 2$ , 所以  $f(x) = 2^x$ .

(2) 由题知,  $g(x) = \frac{2^x - m}{2^x + m}$  ( $m > 0$ ) 是奇函数, 因为  $m > 0$ , 所以  $2^x + m > 0$  恒成立,

所以  $g(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,

$g(0) = \frac{2^0 - m}{2^0 + m} = 0$ , 所以  $m = 1$ .

经检验,  $m = 1$  满足题意. 故  $m = 1$ .

5. BCD 【解析】由题图可知,  $f(1) = 1$ ,

$f(2) = 2$ , 即  $\begin{cases} ka = 1, \\ ka^2 = 2, \end{cases}$  得  $k = \frac{1}{2}, a = 2$ ,

所以  $y = \frac{1}{2} \cdot 2^x = 2^{x-1}$ .

对于 A, 当谣言传播开始后第三周, 即  $x = 3$  时, 传播人数为  $y = 2^{3-1} = 4$  (千人),

所以第一周到第二周增加 1 千人, 第二周到第三周增加  $4 - 2 = 2$  (千人), 故 A 错误;

对于 B, 由  $y = 2^{x-1}$  可知, 第  $n$  周的传播人





数为  $2^{n-1}$  千人, 则第  $(n+1)$  周的传播人数为  $2^n$  千人, 第  $(n+2)$  周的传播人数为  $2^{n+1}$  千人,

则第  $n$  周到第  $(n+1)$  周新增传播人数为  $2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$  (千人), 第  $(n+1)$  周到第  $(n+2)$  周新增传播人数为  $2^{n+1} - 2^n = 2^n$  (千人), 而  $\frac{2^n}{2^{n-1}} = 2$ , 故 B 正确;

对于 C, 第一周传播人数为 1 千人, 第二周传播人数为 2 千人, 故从第一周开始, 该网络空间传播人数翻一番所需时间为 1 周, 故 C 正确;

对于 D, 第四周, 即  $x=4$  时, 传播人数  $y=2^{4-1}=8$  (千人), 所以估计谣言传播发生一个月后该网络空间传播人数会超过 8 000 人, 故 D 正确.

故选 BCD.

6. 【解】(1) 若选  $y = ka^x$ , 则由题意得

$$\begin{cases} ka = 16, \\ ka^4 = 54, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k = \frac{32}{3}, \\ a = \frac{3}{2}, \end{cases}$$

所以  $y = \frac{32}{3} \left( \frac{3}{2} \right)^x, x \in \mathbf{N}^*$  且  $x \leq 12$ ;

若选  $y = mx^2 + n$ , 则由题意得

$$\begin{cases} m+n = 16, \\ 16m+n = 54, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} m = \frac{38}{15}, \\ n = \frac{202}{15}, \end{cases}$$

所以  $y = \frac{38}{15}x^2 + \frac{202}{15}, x \in \mathbf{N}^*$  且  $x \leq 12$ .

(2) 若用  $y = \frac{32}{3} \left( \frac{3}{2} \right)^x, x \in \mathbf{N}^*$  且  $x \leq 12$ , 当  $x=5$  时,  $y=81$ .

若用  $y = \frac{38}{15}x^2 + \frac{202}{15}, x \in \mathbf{N}^*$  且  $x \leq 12$ , 当  $x=5$  时,  $y=76.8$ .

所以用模型  $y = \frac{32}{3} \left( \frac{3}{2} \right)^x, x \in \mathbf{N}^*$  且  $x \leq 12$  更合适.

## 4.2.2 指数函数的图象和性质



### 基础上分

1. D 【解析】对于函数  $f(x) = a^{x+1} - 4 (a > 1)$ , 令  $x+1=0$ , 得  $x=-1$ .

当  $x=-1$  时,  $f(-1) = a^{-1+1} - 4 = a^0 - 4 = 1 - 4 = -3$ .

所以函数  $f(x) = a^{x+1} - 4 (a > 1)$  的图象恒过定点  $(-1, -3)$ . 故选 D.

2. C 【解析】将函数  $y = \left( \frac{1}{4} \right)^x = \left( \frac{1}{2} \right)^{2x}$  的



图象向右平移  $\frac{1}{2}$  个单位长度, 得到函数

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} \text{ 的图象. 故选 C.}$$

**3. C** 【解析】作直线  $x=1$  (图略), 其与四个函数图象的交点的纵坐标从上到下依次为  $c, d, a, b$ , 则有  $c > d > a > b$ .

由  $\sqrt{3} > \frac{5}{4} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ , 知  $a, b, c, d$  的值分别是

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \sqrt{3}, \frac{5}{4}$ . 故 C 正确.

**4. A** 【解析】因为  $y = \left(\frac{b}{a}\right)^x$  为指数函数,

所以  $\frac{b}{a} > 0$ , 且  $\frac{b}{a} \neq 1$ , 所以  $-\frac{b}{2a} < 0$ , 所以排

除 B, D.

由指数函数的图象可知  $0 < \frac{b}{a} < 1$ , 所以

$-\frac{1}{2} < -\frac{b}{2a} < 0$ , 所以二次函数图象顶点的

横坐标在区间  $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$  内, 所以 C 错误.

故选 A.

**5.  $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$**  【解析】函数  $y = 3^{x-1} + m$  的

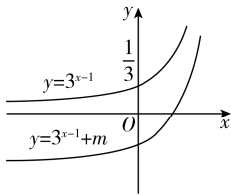
图象是由函数  $y = 3^{x-1}$  的图象向上 ( $m > 0$ ) 或向下 ( $m < 0$ ) 平移  $|m|$  个单位长度得到的,

因为函数  $y = 3^{x-1} + m$  的图象不经过第二象限,

所以只需将函数  $y = 3^{x-1}$  的图象向下平移大于或等于  $\frac{1}{3}$  个单位长度即可,

所以  $m \leq -\frac{1}{3}$ , 即实数  $m$  的取值范围为

$\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$ .



**6. C** 【解析】根据题意, 令  $8 - 2^x \geq 0$ , 即  $2^x \leq 8 = 2^3$ , 解得  $x \leq 3$ . 故选 C.

**7. B** 【解析】令  $u(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \in [0, +\infty)$ , 则  $f(x)$  为由  $y = 2^{u(x)}$  和  $u(x) = x^2 - 2x + 1$  构成的复合函数.

由二次函数性质得内层函数  $u(x)$  在  $(-\infty, 1)$  上单调递减, 由指数函数性质得外层函数在定义域上单调递增, 所以由复



合函数性质得  $f(x)$  在  $(-\infty, 1)$  上单调递减, 而  $u(x) \in [0, +\infty)$ , 故  $f(x) \in [1, +\infty)$ . 故选 B.

## 8. A



**思路导引** 此题中可将  $a, b$  变为同底的指数, 并结合函数单调性和中间值法比较大小.

**【解析】**  $b = 9^{0.2} = 3^{0.4}$ , 因为  $y = 3^x$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 且  $0.5 > 0.4$ , 所以  $3^{0.5} > 3^{0.4} > 1$ , 即  $a > b > 1$ , 又  $0 < \left(\frac{1}{2}\right)^{0.4} < 1$ , 所以  $a > b > 1 > c$ .

故选 A.

**9. C** **【解析】** 由题意得  $2^{x^2+1} \leq 2^{2ax-3}$ , 即  $x^2 + 1 \leq 2ax - 3$ , 则  $x^2 - 2ax + 4 \leq 0$  对任意  $x \in [3, 4]$  恒成立, 所以  $a \geq \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$  在  $x \in [3, 4]$  上恒成立, 即  $a \geq \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right)_{\max}$ .

对于  $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ , 由对勾函数性质可知, 其

在  $[3, 4]$  上单调递增, 则  $\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right)_{\max} = \frac{5}{2}$ ,

所以  $a \geq \frac{5}{2}$ . 故选 C.

**10. C** **【解析】** 根据指数函数的单调性可得, 函数  $y = 2^x$ ,  $y = 3^x - m$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 要使  $f(x)$  在  $(-1, +\infty)$  上单调递增, 只需  $3^1 - m \geq 2^1$ , 则  $m \leq 1$ .

又因为  $f(2m+1) > f(m-1)$ , 则

$$\begin{cases} 2m+1 > m-1, \\ m-1 > -1, \end{cases} \text{ 即 } m > 0, \text{ 所以 } m \in (0, 1].$$

故选 C.

**11. A** **【解析】** 由条件可知, 实数  $a$  需满足

$$\begin{cases} 0 < a < 1, \\ 1 - 3a < 0, \\ a^1 \leq 1 - 3a + \frac{5}{3}, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{1}{3} < a \leq \frac{2}{3}. \text{ 故}$$

选 A.

**12. ACD** **【解析】**  $f(x) = \frac{1+4^x}{2^x} = 2^{-x} + 2^x$ , 其定

义域为  $\mathbf{R}$ , 定义域关于原点对称, 且  $f(-x) = 2^x + 2^{-x} = f(x)$ , 所以  $f(x)$  是偶函数, 故 A 正确, B 错误;

任取  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ , 且  $x_1 < x_2$ , 则

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= 2^{-x_1} + 2^{x_1} - (2^{-x_2} + 2^{x_2}) \\ &= 2^{x_1} - 2^{x_2} + 2^{-x_1} - 2^{-x_2} \\ &= 2^{x_1} - 2^{x_2} + \frac{1}{2^{x_1}} - \frac{1}{2^{x_2}} \end{aligned}$$



$$= 2^{x_1} - 2^{x_2} + \frac{2^{x_2} - 2^{x_1}}{2^{x_1} \cdot 2^{x_2}}$$

$$= (2^{x_1} - 2^{x_2}) \left( 1 - \frac{1}{2^{x_1} \cdot 2^{x_2}} \right)$$

$$= (2^{x_1} - 2^{x_2}) \left( \frac{2^{x_1} \cdot 2^{x_2} - 1}{2^{x_1} \cdot 2^{x_2}} \right).$$

因为  $0 < x_1 < x_2$ , 所以  $2^{x_1} - 2^{x_2} < 0$ ,  $2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = 2^{x_1+x_2} > 2^0 = 1$ , 所以  $f(x_1) < f(x_2)$ , 所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 故 C 正确;

$f(x) = 2^{-x} + 2^x \geq 2\sqrt{2^{-x} \cdot 2^x} = 2$ , 当且仅当  $2^{-x} = 2^x$ , 即  $x = 0$  时取等号, 所以  $f(x)$  的值域为  $[2, +\infty)$ , 故 D 正确. 故选 ACD.

13.  $[0, +\infty)$  【解析】因为  $2^x > 0$ ,  $f(x) = 4^x - 2^{x+1} + 1 = (2^x - 1)^2 \geq 0$ , 当  $2^x = 1$  时取最小值 0. 所以  $f(x)$  的值域为  $[0, +\infty)$ .

14.  $[1, 5]$  【解析】当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $a \leq x + a \leq a + 1$ ,

当  $1 < x \leq 3$  时,  $x^2 - 2x + a = (x-1)^2 + a - 1 \in (a-1, a+3]$ ,

则  $x \in [0, 3]$  时,  $f(x) \in (a-1, a+3]$ .

$g(x) = 3^x - 1$  在  $[0, 2]$  上单调递增, 则  $x \in [0, 2]$  时,  $g(x) \in [0, 8]$ .

因为对任意的  $x_1 \in [0, 3]$ , 总存在  $x_2 \in [0, 2]$ , 使  $f(x_1) = g(x_2)$  成立,

所以  $(a-1, a+3] \subseteq [0, 8]$ ,

则  $a-1 \geq 0$  且  $a+3 \leq 8$ , 得  $1 \leq a \leq 5$ ,

则实数  $a$  的取值范围是  $[1, 5]$ .

15. 2 025 【解析】函数  $f(x) = \left( \frac{2^x - 1}{2^x + 1} \right) x^2 + x + 1$

1 的定义域为  $\mathbf{R}$ , 且  $f(-x) + f(x) =$

$$\left( \frac{2^{-x} - 1}{2^{-x} + 1} \right) x^2 - x + 1 + \left( \frac{2^x - 1}{2^x + 1} \right) x^2 + x + 1 =$$

$$\left( \frac{1 - 2^x}{2^x + 1} \right) x^2 + \left( \frac{2^x - 1}{2^x + 1} \right) x^2 + 2 = 2, f(0) = 1, \text{ 所以}$$

$f(-1\ 012) + f(-1\ 011) + \cdots + f(-1) + f(0) + f(1) + \cdots + f(1\ 011) + f(1\ 012) = 2 \times 1\ 012 + 1 = 2\ 025$ .

16. (1) 【解】因为函数  $f(x) = \frac{a \cdot 3^x - 1}{3^x + 1}$  为奇函

数, 定义域为  $\mathbf{R}$ , 所以  $f(0) = \frac{a-1}{1+1} = 0$ , 即

$a = 1$ .

此时  $f(x) = \frac{3^x - 1}{3^x + 1}$ , 则  $f(-x) = \frac{3^{-x} - 1}{3^{-x} + 1} =$

$\frac{1 - 3^x}{1 + 3^x} = -f(x)$ , 满足题意, 所以  $a = 1$ .

(2) 【证明】由 (1) 知,  $f(x) = \frac{3^x - 1}{3^x + 1} =$

$$\frac{3^x + 1 - 2}{3^x + 1} = 1 - \frac{2}{3^x + 1}.$$



任取  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ , 且  $x_1 < x_2$ , 则

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= 1 - \frac{2}{3^{x_1} + 1} - 1 + \frac{2}{3^{x_2} + 1} \\ &= \frac{2}{3^{x_2} + 1} - \frac{2}{3^{x_1} + 1} \\ &= \frac{2(3^{x_1} + 1 - 3^{x_2} - 1)}{(3^{x_1} + 1)(3^{x_2} + 1)} \\ &= \frac{2(3^{x_1} - 3^{x_2})}{(3^{x_1} + 1)(3^{x_2} + 1)}, \end{aligned}$$

因为  $x_1 < x_2$ , 则  $3^{x_1} - 3^{x_2} < 0$ ,  $(3^{x_1} + 1)(3^{x_2} + 1) > 0$ , 所以  $f(x_1) - f(x_2) < 0$ , 即  $f(x_1) < f(x_2)$ , 所以  $y = f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增.

(3) 【解】由  $f(k \cdot 4^x - 3) + f(2^x) > 0$ , 得  $f(k \cdot 4^x - 3) > -f(2^x) = f(-2^x)$ .

因为函数  $y = f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 所以

$$k \cdot 4^x - 3 > -2^x, \text{ 即 } k > \frac{3}{4^x} - \frac{1}{2^x}.$$

由题意, 存在实数  $x \in [1, 3]$ , 使得  $k >$

$$\frac{3}{4^x} - \frac{1}{2^x} \text{ 成立, 则 } k > \left( \frac{3}{4^x} - \frac{1}{2^x} \right)_{\min}.$$

$$\text{令 } t = \frac{1}{2^x} \left( \frac{1}{8} \leq t \leq \frac{1}{2} \right), \text{ 则 } k > (3t^2 - t)_{\min},$$

$$\text{当 } t = \frac{1}{6} \text{ 时, 有 } (3t^2 - t)_{\min} = -\frac{1}{12}, \text{ 即 } k > -$$

$$\frac{1}{12}, \text{ 所以 } k \text{ 的取值范围为 } \left( -\frac{1}{12}, +\infty \right).$$



### 对点上分

1. B 【解析】函数  $y = 3^x$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 函数  $y = x^{0.6}$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

 **提示:** 由函数性质比较幂的大小时, 既可以借助指数函数, 又可以借助幂函数

$$a = 4^{0.3} = 2^{0.6}, c = 3^{0.75} > 3^{0.6} > 2^{0.6} = a, b = 8^4 = 2^{12} > 3 > 3^{0.75} = c, \text{ 所以 } a < c < b. \text{ 故选 B.}$$

2. C 【解析】因为  $f(x)$  是定义域为  $\mathbf{R}$  的偶

$$\text{函数, 所以 } a = f\left(-3^{\frac{1}{3}}\right) = f\left(3^{\frac{1}{3}}\right), b = f\left(9^{\frac{1}{5}}\right), c = f\left(-\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{2}{9}}\right) = f\left(\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{2}{9}}\right),$$

$$\text{因为 } 9^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{2}{5}}, \text{ 且 } y = 3^x \text{ 是增函数, 故 } 3^{\frac{2}{5}} > 3^{\frac{1}{3}}, \text{ 又 } \left[\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{2}{9}}\right]^9 = \frac{81}{4} < \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^9,$$

$$\text{所以 } \left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{2}{9}} < 3^{\frac{1}{3}} < 3^{\frac{2}{5}} = 9^{\frac{1}{5}}.$$

因为  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 所以

$$f\left(\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{2}{9}}\right) < f\left(3^{\frac{1}{3}}\right) < f\left(9^{\frac{1}{5}}\right), \text{ 所以}$$

$$f\left(-\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{2}{9}}\right) < f\left(-3^{\frac{1}{3}}\right) < f\left(9^{\frac{1}{5}}\right), \text{ 即 } c < a < b.$$



故选 C.

3. A 【解析】函数  $f(x) = \frac{x^2}{4^x + 4^{-x}}$  的定义域为

$$\mathbf{R}, \text{ 又 } f(-x) = \frac{(-x)^2}{4^{-x} + 4^x} = \frac{x^2}{4^x + 4^{-x}} = f(x),$$

所以  $f(x) = \frac{x^2}{4^x + 4^{-x}}$  为偶函数, 函数图象关于  $y$  轴对称, 故排除 B, D;

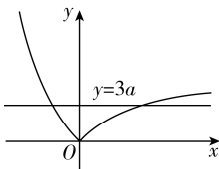
当  $x > 0$  时,  $4^x > 0, 4^{-x} > 0, x^2 > 0$ , 所以  $f(x) > 0$ , 故排除 C. 故选 A.

4. C 【解析】由题意知, 直线  $y = 3a$  与函数  $y = |a^x - 1|$  的图象有两个公共点,

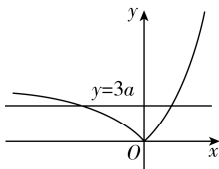
当  $0 < a < 1$  时,  $y = |a^x - 1|$  的图象如图①所示, 可得  $0 < 3a < 1$ , 解得  $0 < a < \frac{1}{3}$ ;

当  $a > 1$  时,  $y = |a^x - 1|$  的图象如图②所示, 可得  $0 < 3a < 1$ , 解得  $0 < a < \frac{1}{3}$ , 因为  $a > 1$ , 所以此时不存在实数  $a$ .

综上所述, 实数  $a$  的取值范围为  $(0, \frac{1}{3})$ .



图①



图②

### 易错警示

对于指数函数  $y = a^x$ , 当底数  $a$  取不同值时, 其对应的函数图象具有不同的特征, 此时需要分类讨论. 指数型函数同理.

5. B 【解析】若  $0 < a < 1$ , 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = a^x + 1$ , 此时  $f(x) \in (1, 2]$ ;

又当  $x < 0$  时,  $f(x) = -x^2 - 2ax - 2 = -(x+a)^2 + a^2 - 2 \leq a^2 - 2$ , 此时  $f(x)$  的值域不可能为  $\mathbf{R}$ , 故舍去.

所以  $a > 1$ , 则当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = a^x + 1$ , 此时  $f(x) \in [2, +\infty)$ ;

当  $x < 0$  时,  $f(x) = -x^2 - 2ax - 2 = -(x+a)^2 + a^2 - 2 \leq a^2 - 2$ .

要使  $f(x)$  的值域为  $\mathbf{R}$ , 则  $\begin{cases} a^2 - 2 \geq 2, \\ a > 1, \end{cases}$  解得

$a \geq 2$ , 即  $a$  的取值范围是  $[2, +\infty)$ . 故选 B.

6. BCD 【解析】函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 定义域关于原点对称且  $f(-x) = \frac{a}{2}(e^{-\frac{2x}{a}} +$

$e^{\frac{2x}{a}}) = f(x)$ ,  $\therefore f(x)$  为偶函数, 故 A 错误, B 正确.



$\because e^{\frac{2x}{a}} > 0, e^{-\frac{2x}{a}} > 0, a > 0, \therefore f(x) \geq \frac{a}{2} \times$

$2\sqrt{e^{\frac{2x}{a}} \cdot e^{-\frac{2x}{a}}} = a$ , 当且仅当  $e^{\frac{2x}{a}} = e^{-\frac{2x}{a}}$  时, 即  $x=0$  时取等号, 故 C 正确.

$\because a > 0, \therefore$  函数  $y = \frac{2x}{a}$  在定义域  $\mathbf{R}$  上单调

递增, 又函数  $y = e^x$  在定义域  $\mathbf{R}$  上单调递

增,  $\therefore$  函数  $y = e^{\frac{2x}{a}}$  在定义域  $\mathbf{R}$  上单调递增,

且当  $x < 0$  时,  $0 < e^{\frac{2x}{a}} < 1$ , 当  $x > 0$  时,  $e^{\frac{2x}{a}} > 1$ .

又对勾函数  $y = x + \frac{1}{x}$  在  $(0, 1)$  上单调递

减, 在  $(1, +\infty)$  上单调递增,  $\therefore f(x) =$

$\frac{a}{2}(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}}) = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{2x}{a}} + \frac{1}{e^{\frac{2x}{a}}}\right)$  在  $(-\infty, 0)$  上

单调递减, 在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 即

$f(x)$  的单调递增区间为  $[0, +\infty)$ , 故 D 正确. 故选 BCD.

7.  $(-\infty, 4)$  【解析】由题意可得  $2^{4-3x} =$

$-(4-3x) + (y+1) + 2^{y+1}$ , 所以  $2^{4-3x} + (4-3x) = 2^{y+1} + (y+1)$ .

令  $f(x) = 2^x + x$ , 因为函数  $y = 2^x$  和  $y = x$  均在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 所以  $f(x) = 2^x + x$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增.

又因为  $2^{4-3x} + (4-3x) = 2^{y+1} + (y+1)$  等价于  $f(4-3x) = f(1+y)$ , 所以  $4-3x = 1+y$ , 即  $3x+y=3$ .

因为  $x, y$  为正实数, 所以  $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = \frac{1}{3} \times$

$\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{y}\right)(y+3x) = \frac{1}{3} \times \left(6 + \frac{9x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq$

$\frac{1}{3} \times \left(6 + 2\sqrt{\frac{9x}{y} \cdot \frac{y}{x}}\right) = \frac{1}{3} \times 12 = 4,$

当且仅当  $\frac{9x}{y} = \frac{y}{x}$ , 即  $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{2}$  时取等

号, 所以  $\frac{1}{x} + \frac{3}{y}$  的最小值为 4, 所以  $m$  的

范围为  $(-\infty, 4)$ .

8. 【解】(1) 因为  $f(x)$  是奇函数,  $g(x)$  是偶函

数, 所以  $f(-x) = -f(x), g(-x) = g(x)$ , 则

由题可得  $f(-x) + g(-x) = 2^{-x}$ ,

即  $-f(x) + g(x) = 2^{-x}$ , ①

又  $f(x) + g(x) = 2^x$ , ②

联立①②解得  $f(x) = \frac{1}{2}(2^x - 2^{-x})$ ,

$g(x) = \frac{1}{2}(2^x + 2^{-x})$ .

(2)  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 理由如下:

任取  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ , 且  $x_1 < x_2$ ,



$$\begin{aligned}
 \text{则 } f(x_1) - f(x_2) &= \frac{1}{2} \left( 2^{x_1} - 2^{x_2} + \frac{1}{2^{x_2}} - \frac{1}{2^{x_1}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( 2^{x_1} - 2^{x_2} + \frac{2^{x_1} - 2^{x_2}}{2^{x_1} 2^{x_2}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} (2^{x_1} - 2^{x_2}) \frac{2^{x_1+x_2} + 1}{2^{x_1+x_2}}.
 \end{aligned}$$

因为  $x_1 < x_2$ , 所以  $2^{x_1} < 2^{x_2}$ ,  $2^{x_1+x_2} + 1 > 0$ ,  $2^{x_1+x_2} > 0$ ,

所以  $f(x_1) - f(x_2) < 0$ , 所以  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增.

(3) 依题意,  $\forall x \in [1, 2], mf(x) - g(2x) \leq$

0 恒成立, 即  $\forall x \in [1, 2], m \cdot \frac{2^x - 2^{-x}}{2} -$

$\frac{2^{2x} + 2^{-2x}}{2} \leq 0$  恒成立, 由于  $\forall x \in [1, 2], 2^x -$

$2^{-x} > 0$ , 故  $\forall x \in [1, 2], m \leq \frac{2^{2x} + 2^{-2x}}{2^x - 2^{-x}}$  恒

成立,

令  $t = 2^x - 2^{-x}$ , 由(2)可知  $y = 2^x - 2^{-x}$  在  $\mathbf{R}$  上

单调递增, 因此可得  $t \in \left[ \frac{3}{2}, \frac{15}{4} \right]$ ,

由  $t^2 = 2^{2x} + 2^{-2x} - 2$ , 即  $2^{2x} + 2^{-2x} = t^2 + 2$ , 得

$$\frac{2^{2x} + 2^{-2x}}{2^x - 2^{-x}} = \frac{t^2 + 2}{t} = t + \frac{2}{t}.$$

根据对勾函数的性质可知, 函数  $y = t +$

$\frac{2}{t}$  在区间  $\left[ \frac{3}{2}, \frac{15}{4} \right]$  上单调递增, 所以  $y =$

$t + \frac{2}{t}$  在  $t = \frac{3}{2}$  时取得最小值, 最小值为  $\frac{17}{6}$ .

所以  $m \leq \frac{17}{6}$ , 故实数  $m$  的取值范围

为  $\left( -\infty, \frac{17}{6} \right]$ .



### 综合上分

9.  $\left\{ x \mid x < -\frac{1}{4} \right\}$  【解析】函数  $f(x) = \frac{4}{1+e^x} -$

$a$  在  $\mathbf{R}$  上单调递减,

令函数  $g(x) = f(x) - 2 + a = \frac{2(1-e^x)}{1+e^x} (x \in$

$\mathbf{R})$ , 则  $g(-x) = \frac{2(1-e^{-x})}{1+e^{-x}} = \frac{2(e^x-1)}{e^x+1} =$

$-g(x)$ , 所以函数  $g(x)$  是  $\mathbf{R}$  上的奇函数,

且在  $\mathbf{R}$  上单调递减,

**提示:** 研究函数的定义域、奇偶性和单调性, 利用函数性质进行转化

不等式  $f(1+3x) + f(x) > 4 - 2a \Leftrightarrow f(1+3x) -$

$2 + a > -[f(x) - 2 + a] \Leftrightarrow g(1+3x) > -g(x) = g$

$(-x)$ , 因此  $1+3x < -x$ , 解得  $x < -\frac{1}{4}$ ,





所以原不等式的解集为  $\left\{x \mid x < -\frac{1}{4}\right\}$ .

## 4.3 对数

### 4.3.1 对数的概念+

### 4.3.2 对数的运算



#### 基础上分

1. C 【解析】只有符合  $a > 0$ , 且  $a \neq 1, N > 0$  时,  $a^x = N$  才能化为对数式, 故(2)错误. 由定义可知(3)(4)均错误. 只有(1)正确. 故选 C.

2.  $(1, 2) \cup (2, 5)$  【解析】要使  $\log_{(a-1)}(5-a)$  有意义, 则

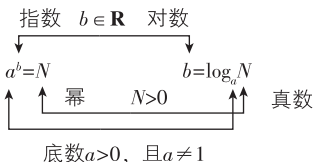
$$\begin{cases} 5-a > 0, \\ a-1 > 0, \\ a-1 \neq 1, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} a < 5, \\ a > 1, \\ a \neq 2, \end{cases} \text{ 解得 } 1 <$$

$a < 2$  或  $2 < a < 5$ , 即实数  $a$  的取值范围是  $(1, 2) \cup (2, 5)$ .

3.  $\frac{4}{3}$  【解析】由已知得  $a^{2m} = 2, a^n = 3$ , 则

$$a^{4m} = 4, \text{ 故 } a^{4m-n} = \frac{a^{4m}}{a^n} = \frac{4}{3}.$$

#### 规律点拨 指对互化



4. B 【解析】 $\lg 2 + \lg 5 + 4^{\frac{1}{2}} - (1 - \sqrt{2})^0 = \lg(2 \times 5) + 2 - 1 = 2$ , 故选 B.

5. D 【解析】原式  $= \left( \frac{\lg 5^3}{\lg 2} + \frac{\lg 5^2}{\lg 2^2} + \frac{\lg 5}{\lg 2^3} \right) \cdot$

$$\left( \frac{\lg 2}{\lg 5} + \frac{\lg 2^2}{\lg 5^2} + \frac{\lg 2^3}{\lg 5^3} \right) = \left( 3 + 1 + \frac{1}{3} \right) \frac{\lg 5}{\lg 2} \cdot$$

$$3 \frac{\lg 2}{\lg 5} = 13. \text{ 故选 D.}$$

6. B 【解析】因为  $a = \frac{1}{2} \lg 500 - \lg \sqrt{5}, b =$

$$\log_4 5, \text{ 所以 } a + 2^b = \lg 10 \sqrt{5} - \lg \sqrt{5} + 4^{\frac{1}{2} \log_4 5} = \lg 10 + 4^{\log_4 \sqrt{5}} = 1 + \sqrt{5}. \text{ 故 B 正确.}$$

7. ACD 【解析】因为  $10^a = 5, 10^b = 20$ , 所以  $a = \lg 5, b = \lg 20$ .

对于 A,  $a + b = \lg 5 + \lg 20 = \lg 100 = 2$ , 所以 A 正确;

对于 B,  $b - a = \lg 20 - \lg 5 = \lg 4 \neq \lg 5$ , 所以 B 错误;

对于 C,  $ab - 2(\lg 5)^2 = \lg 20 \cdot \lg 5 - 2(\lg 5)^2 = \lg 5 \cdot \lg \frac{4}{5}$ , 又  $\lg \frac{4}{5} < 0, \lg 5 > 0$ ,



故  $ab < 2(\lg 5)^2$ , 所以 C 正确;

对于 D,  $\log_{25} 8 = \frac{\lg 8}{\lg 25} = \frac{3\lg 2}{2\lg 5} = \frac{3(\lg 20 - \lg 10)}{2\lg 5} = \frac{3(b-1)}{2a} = \frac{3b-3}{2a}$ , 所以 D 正确. 故选 ACD.

8. A 【解析】因为  $2^a = 5^b = m (m > 0)$ , 所以  $a = \log_2 m, b = \log_5 m$ , 所以  $\frac{1}{a} = \log_m 2, \frac{1}{b} = \log_m 5$ , 所以  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \log_m 2 + \log_m 5 = \log_m 10 = 2$ , 所以  $m = \sqrt{10}$ . 故选 A.

9. C 【解析】由题可得  $15 = 15 \ln \frac{100-20}{w-20}$ , 得  $\frac{80}{w-20} = e$ , 即  $w = 20 + \frac{80}{e} \approx 20 + \frac{80}{2.72} \approx 49.41$ . 故选 C.

10. C 【解析】原式  $= 0 - 2 + 2^{\log_2 2 + \log_2 3} = -2 + 2^{\log_2 (2 \times 3)} = -2 + 6 = 4$ , 故选 C.

11. B 【解析】因为  $x \log_3 2 = 1$ , 所以  $x = \log_2 3$ , 所以  $2^x + 2^{-x} = 2^x + \frac{1}{2^x} = 2^{\log_2 3} + \frac{1}{2^{\log_2 3}} = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ , 故选 B.

12. C 【解析】因为方程  $x^2 + x \cdot \log_2 6 + \log_2 3 = 0$  的两根为  $\alpha, \beta$ , 所以  $\alpha + \beta = -\log_2 6$ , 故  $\left(\frac{1}{4}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^\beta = \left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha+\beta} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\log_2 6} = (2^{-2})^{-\log_2 6} = 36$ . 故选 C.

13. 98 【解析】 $5^{2\log_5 10} = (5^{\log_5 10})^2 = 10^2 = 100$ ,  $\log_{\sqrt{2}-1} (3+2\sqrt{2}) = \log_{\sqrt{2}-1} (\sqrt{2}+1)^2 = \log_{\sqrt{2}-1} (\sqrt{2}-1)^{-2} = -2$ ,

提示: 利用完全平方公式化简后, 把  $\sqrt{2}+1$  看成  $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

所以原式  $= 100 - 2 = 98$ .



### 对点上分

1. B 【解析】原式  $= (\log_2 3 + \log_3 3) \times (\log_3 2 + \log_3 2) - \log_2 2^{\frac{5}{4}}$   
 $= \left(\frac{1}{2} \log_2 3 + \frac{1}{3} \log_2 3\right) \times \left(\log_3 2 + \frac{1}{2} \log_3 2\right) - \frac{5}{4}$   
 $= \frac{5}{6} \log_2 3 \times \frac{3}{2} \log_3 2 - \frac{5}{4}$   
 $= \frac{5}{4} \times \frac{\lg 3}{\lg 2} \times \frac{\lg 2}{\lg 3} - \frac{5}{4} = 0$ .

故选 B.



2. A 【解析】 $\frac{a+1}{a-1} = 1 + \frac{2}{a-1} = 2 + \log_{\frac{3}{2}} 6$ , 则

$$\frac{2}{a-1} = 1 + \log_{\frac{3}{2}} 6 = \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{2} + \log_{\frac{3}{2}} 6 = 2\log_{\frac{3}{2}} 3,$$

$$\text{得 } a = \frac{1 + \log_{\frac{3}{2}} 3}{\log_{\frac{3}{2}} 3} = \frac{\log_{\frac{3}{2}} \frac{9}{2}}{\log_{\frac{3}{2}} 3} = \log_3 \frac{9}{2}.$$

故选 A.

3. D 【解析】 $\because f(x)$  是奇函数,

$$\therefore f(2-x) = -f(x-2), \text{ 又 } f(2-x) = f(x),$$

$$\therefore f(x) = -f(x-2) = -[-f(x-2-2)] = f(x-4), \therefore f(x) \text{ 是以 } 4 \text{ 为周期的函数.}$$

$$f(2 + \log_2 2024) = f(2 + \log_2 (2^3 \times 253)) = f(5 + \log_2 253),$$

$$\text{又 } \because 2^8 = 256, 2^7 = 128, \text{ 则 } 12 < 5 + \log_2 253 < 13, 0 < 5 + \log_2 253 - 12 < 1.$$

又  $f(x)$  是以 4 为周期的函数, 故  $f(2 + \log_2 2024) = f(5 + \log_2 253 - 3 \times 4) = 2^{\log_2 253 - 7} = \frac{253}{128}$ .

$$024) = f(5 + \log_2 253 - 3 \times 4) = 2^{\log_2 253 - 7} = \frac{253}{128}.$$

故选 D.

4. B 【解析】 $\because f(x) = \log_3 \frac{x}{3} \cdot \log_3 \frac{x}{27} =$

$$(\log_3 x - 1)(\log_3 x - 3) = (\log_3 x)^2 - 4\log_3 x + 3,$$

$$f(x_1) = f(x_2), \text{ 且 } x_1 \neq x_2, \therefore \log_3 x_1 + \log_3 x_2 =$$

$$4, \text{ 即 } x_1 \cdot x_2 = 81, \therefore \frac{9}{x_1} + \frac{1}{x_2} \geq 2\sqrt{\frac{9}{x_1 x_2}} =$$

$$2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \text{ 当且仅当 } \frac{9}{x_1} = \frac{1}{x_2}, \text{ 即 } x_1 = 27,$$

$$x_2 = 3 \text{ 时等号成立. 故 } \frac{9}{x_1} + \frac{1}{x_2} \text{ 的最小值为}$$

$$\frac{2}{3}, \text{ 故选 B.}$$

5. A 【解析】因为  $\log_{\sqrt{3}}(3m) + \log_3 n =$

$$\log_3(9m^2) + \log_3 n = \log_3(9m^2 n), \log_{\sqrt{3}}(2m^2 +$$

$$n) = \log_3(2m^2 + n)^2, \text{ 所以 } 9m^2 n = (2m^2 +$$

$$n)^2, \text{ 化简得 } 4m^4 - 5m^2 n + n^2 = 0, \text{ 即 } (4m^2 -$$

$$n)(m^2 - n) = 0, \text{ 解得 } 4m^2 = n \text{ 或 } m^2 = n.$$

$$\text{又 } \log_2 m - \log_4 n = \log_4 m^2 - \log_4 n = \log_4 \frac{m^2}{n}. \text{ 故}$$

$$\text{当 } 4m^2 = n \text{ 时, } \log_2 m - \log_4 n = \log_4 \frac{1}{4} = -1;$$

$$\text{当 } m^2 = n \text{ 时, } \log_2 m - \log_4 n = \log_4 1 = 0.$$

综上,  $\log_2 m - \log_4 n$  的值为 -1 或 0. 故选 A.

6. B 【解析】由题意得,  $\log_{30} 18 = \frac{\lg 18}{\lg 30} =$

$$\frac{\lg 2 + \lg 9}{\lg 3 + \lg 10} = \frac{\lg 2 + 2\lg 3}{\lg 3 + 1} = \frac{a + 2b}{b + 1}. \text{ 故选 B.}$$

7. B 【解析】 $P_{10}(k) + P_{10}(k+1) + \dots +$

$$P_{10}(14) = \lg \frac{k+1}{k} + \lg \frac{k+2}{k+1} + \dots + \lg \frac{15}{14} =$$

$$\lg \frac{15}{k}, \text{ 而 } \frac{\log_2 9 - \log_2 3}{1 + \log_2 5} = \frac{\log_2 3}{\log_2 10} = \lg 3, \text{ 故}$$



$$\lg \frac{15}{k} = \lg 3, \text{ 即 } k=5, \text{ 故选 B.}$$

- 8. B** 【解析】设大约经过  $n$  天, “进步值”大约是“退步值”的 100 倍. 此时“进步值”为  $(1+1\%)^n = 1.01^n$ , “退步值”为  $(1-1\%)^n = 0.99^n$ , 即  $\frac{1.01^n}{0.99^n} = 100$ , 则  $n =$

$$\log_{\frac{101}{99}} 100 = \frac{\lg 100}{\lg 101 - \lg 99} \approx \frac{2}{2.0043 - 1.9956} \approx 230. \text{ 故选 B.}$$

- 9. C** 【解析】由  $\log_2(x-2y) = 2 \Rightarrow x-2y = 2^2 = 4$ ,

$$\text{因为 } 2^x > 0, \frac{1}{4^y} > 0,$$

$$\text{所以 } 2^x + \frac{1}{4^y} = 2^x + 2^{-2y} \geq 2 \sqrt{2^x \times 2^{-2y}} =$$

$$2 \sqrt{2^{x-2y}} = 2 \sqrt{2^4} = 8,$$

$$\text{当且仅当 } x = -2y = 2, \text{ 即 } \begin{cases} x=2, \\ y=-1 \end{cases} \text{ 时取等号.}$$

故选 C.

- 10. 3** 【解析】若  $f(x) = \frac{1}{4}$ , 则有  $\begin{cases} x \leq 1, \\ 2^{-x} = \frac{1}{4} \end{cases}$  或

$$\begin{cases} x > 1, \\ \log_{81} x = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

$$\text{由 } 2^{-x} = \frac{1}{4} = 2^{-2} \text{ 解得 } x=2, \text{ 与 } x \leq 1 \text{ 矛盾,}$$

$$\text{故 } \begin{cases} x \leq 1, \\ 2^{-x} = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ 无解, 舍去;}$$

$$\text{由 } \log_{81} x = \frac{1}{4} \text{ 解得 } x = 81^{\frac{1}{4}} = (3^4)^{\frac{1}{4}} = 3, \text{ 满足 } x > 1.$$

$$\text{所以满足 } f(x) = \frac{1}{4} \text{ 的 } x \text{ 的值为 } 3.$$

- 11. (1) 【证明】** 令  $3^a = 4^b = 6^c = t (t > 1)$ ,

$$\text{则 } a = \log_3 t, b = \log_4 t, c = \log_6 t.$$

$$\text{所以 } \frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{\log_3 t} + \frac{1}{\log_4 t} = \frac{2 \lg 3}{\lg t} + \frac{\lg 4}{\lg t} =$$

$$\frac{\lg(3^2 \times 4)}{\lg t} = \frac{\lg 36}{\lg t}, \frac{2}{c} = \frac{2}{\log_6 t} = \frac{2 \lg 6}{\lg t} =$$

$$\frac{\lg 36}{\lg t}, \text{ 故 } \frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c} \text{ 成立.}$$

$$(2) \text{ 【解】 由 (1) 知, } \frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}, \text{ 即 } \frac{1}{c} =$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{2b}. \text{ 所以 } \frac{a+b}{c} = (a+b) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{2b} \right) =$$

$$\frac{3}{2} + \frac{b}{a} + \frac{a}{2b} \geq \frac{3}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} + \sqrt{2}, \text{ 当}$$

$$\text{且仅当 } \frac{b}{a} = \frac{a}{2b}, \text{ 即 } a = \sqrt{2}b \text{ 时等号成立.}$$



由  $m^2 + \sqrt{2} \leq \frac{a+b}{c}$  恒成立知,  $m^2 + \sqrt{2} \leq$

$\left(\frac{a+b}{c}\right)_{\min} = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$  成立, 即  $m^2 \leq \frac{3}{2}$ , 解

得  $-\frac{\sqrt{6}}{2} \leq m \leq \frac{\sqrt{6}}{2}$ , 所以实数  $m$  的取值范

围是  $\left\{m \mid -\frac{\sqrt{6}}{2} \leq m \leq \frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$ .

## 4.4 对数函数

### 4.4.1 对数函数的概念+

### 4.4.2 对数函数的图象和性质



#### 基础上分

**1. B** 【解析】由于形如  $y = \log_a x$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ) 的函数为对数函数, 故符合此形式的函数表达式有②③, ①  $a \in \mathbf{R}$  不符合, ④  $x+2$  不符合, ⑤系数为 2 不符合, 故 B 正确.

**2. A** 【解析】由题意得  $\begin{cases} 1-x \geq 0, \\ \ln x \neq 0, \\ x > 0, \end{cases}$  解得  $0 < x < 1$ , 即函数  $f(x)$  的定义域为  $(0, 1)$ . 故选 A.

**3. C** 【解析】 $f(x) = \log_2(2x) \cdot \log_2(4x) = (1 + \log_2 x)(2 + \log_2 x)$ ,

设  $\log_2 x = t, t \in \mathbf{R}$ ,

 **提示**: 换元, 将对数函数问题转化为二次函数问题

则  $y = (1+t)(2+t) = t^2 + 3t + 2 = \left(t + \frac{3}{2}\right)^2 -$

$\frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$ ,

故函数  $f(x)$  的值域为  $\left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$ . 故选 C.

**4. 5** 【解析】由对数函数的定义可知

$$\begin{cases} a^2 - 3a - 10 = 0, \\ a - 1 > 0, \\ a - 1 \neq 1, \end{cases} \quad \text{解得 } a = 5.$$

**5. 1** 【解析】由题设知  $\begin{cases} m-1=1, \\ \log_a 4=2, \end{cases}$  可得

$$\begin{cases} m=2, \\ a=2, \end{cases} \text{ 故 } f(x) = \log_2 x, \text{ 所以 } f(m) = f(2) =$$

$$\log_2 2 = 1.$$

**6. A** 【解析】 $\because$  点  $(m, n)$  在函数  $y = \lg x$  的图象上,  $\therefore n = \lg m$ .

对于 A,  $\lg m^2 = 2 \lg m = 2n$ , 故 A 正确;

对于 B,  $\lg(10m) = \lg 10 + \lg m = 1 + \lg m = 1 + n$  与  $10n$  不一定相等, 故 B 不正确;

对于 C,  $\lg(m+10)$  与  $n+1$  不一定相等, 故 C 不正确;

对于 D,  $\lg \frac{m}{10} = \lg m - 1 = n - 1 \neq n + 1$ , 故 D

不正确. 故选 A.



**7. D** 【解析】因为函数  $f(x) = \log_a(x-b)$  在  $(b, +\infty)$  上单调递减, 所以  $0 < a < 1$ .

因为函数  $f(x)$  的图象与  $x$  轴的交点在  $x$  轴正半轴上, 所以令  $f(x) = 0$ , 则  $x = 1+b > 0$ , 即  $b > -1$ .

因为函数  $f(x)$  图象与  $y$  轴有交点, 所以令  $x = 0$ ,  $f(x) = \log_a(-b)$ , 即  $b < 0$ , 所以  $-1 < b < 0$ , 故选 D.

**8. C** 【解析】随着  $x$  的增大, 根据  $C_3, C_4$  的函数值由正变为负, 可知它们是对数函数图象且底数小于 1, 作一条直线  $y = 1$  (图略), 发现  $C_3$  与直线的交点在  $C_4$  与直线交点的左侧, 所以  $C_3$  的底数小于  $C_4$  的底数; 同理, 作一条直线  $x = 1$  (图略), 观察它与  $C_1, C_2$  的交点可得  $C_1$  的指数大于  $C_2$  的指数. 故选 C.

**一题多解**

曲线  $C_1, C_2$  是指数函数  $y = a^x$  的图象, 且其图象在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 所以  $a > 1$ , 当  $x = 1$  时,  $C_1$  的函数值大于  $C_2$  的函数值, 故  $C_1, C_2$  对应的  $a$  值分别为  $2, \sqrt{2}$ ;

曲线  $C_3, C_4$  是对数函数  $y = \log_a x$  的图象, 且其图象在区间  $(0, +\infty)$  上单调递减, 所以  $C_3, C_4$  对应的  $a$  值的取值范围为  $0 < a < 1$ , 当  $x = 2$  时,  $C_3$  的函数值大于  $C_4$  的函数值, 故  $C_3, C_4$  对应的  $a$  值依次为  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ . 故选 C.

**9. A** 【解析】易知函数  $f(x) = \frac{\ln x^2}{x}$  的定义域

为  $\{x \mid x \neq 0\}$ , 因为  $f(-x) = \frac{\ln(-x)^2}{-x} =$

$\frac{\ln x^2}{-x} = -f(x)$ , 所以函数  $f(x)$  为奇函数, 排

除 D;

又当  $x > 1$  时,  $\ln x^2 > \ln 1 = 0$ , 则  $f(x) > 0$ , 排除 C;

$f(2) = \frac{\ln 4}{2} = \ln 2 < 1$ , 故排除 B. 故选 A.

**10. D** 【解析】对于函数  $f(x) = \log_a(2x-3) + 1$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ),

令  $2x-3 = 1$ , 可得  $x = 2$ , 且  $f(2) = \log_a 1 + 1 = 1$ , 所以 A 的坐标为  $(2, 1)$ , 即  $m = 2$ ,  $n = 1$ ,

对任意的正数  $x, y$  都有  $mx + ny = 4$ , 即  $2x + y = 4$ , 则  $2(x+1) + y = 6$ ,

所以  $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{y} = \frac{1}{6} [2(x+1) + y] \left( \frac{1}{x+1} + \frac{2}{y} \right) = \frac{1}{6} \left[ 4 + \frac{4(x+1)}{y} + \frac{y}{x+1} \right] \geq \frac{1}{6} \left[ 4 + \right.$



$$2\sqrt{\frac{4(x+1)}{y} \cdot \frac{y}{x+1}} = \frac{4}{3},$$

$$\text{当且仅当} \begin{cases} \frac{4(x+1)}{y} = \frac{y}{x+1}, \\ 2x+y=4, \\ x>0, \\ y>0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=3 \end{cases} \text{时,}$$

等号成立,

所以  $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{y}$  的最小值是  $\frac{4}{3}$ . 故选 D.

- 11. D** 【解析】 $f(1) = 0$ , 故  $f(\log_2 x) > 0 = f(1)$ . 因为函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数, 在区间  $[0, +\infty)$  上单调递增, 所以  $f(|\log_2 x|) > 0 = f(1)$ , 故  $|\log_2 x| > 1$ , 即  $\log_2 x > 1$  或  $\log_2 x < -1$ , 解得  $x > 2$  或  $0 < x < \frac{1}{2}$ . 故  $f(\log_2 x) > 0$  的解集为  $(0, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$ . 故选 D.

- 12. D** 【解析】因为函数  $y = \log_{0.3} x, y = \log_{0.5} x$  都是减函数, 所以  $a = \log_{0.3} 0.5 < \log_{0.3} 0.3 = 1, \log_{0.5} 0.5 = 1 < b = \log_{0.5} 0.3 < \log_{0.5} 0.25 = 2$ . 又  $c = \frac{1}{2} \log_2 17 = \log_2 \sqrt{17} > \log_2 4 = 2$ , 所以  $c > b > a$ . 故选 D.

- 13. D** 【解析】由题意对任意正数  $x, y$ , 都有  $f(x) + f(y) = f(xy)$ , 可设函数  $f(x) = \log_a x$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ),

$$\text{由 } f\left(\frac{1}{9}\right) + f\left(\frac{1}{5}\right) = 6 \text{ 得 } \log_a \frac{1}{9} + \log_a \frac{1}{5} = 6, \text{ 即 } \log_a 45 = -6.$$

$$\text{故 } f(2\,025) = \log_a 2\,025 = 2\log_a 45 = -12, \text{ 故选 D.}$$

**一题多解**  $\because$  对任意的正数  $x, y$ , 都有

$$f(x) + f(y) = f(xy),$$

$$\therefore \text{令 } x = y = 1 \text{ 可得 } f(1) + f(1) = f(1), \text{ 解得 } f(1) = 0.$$

$$\text{令 } y = \frac{1}{x}, \text{ 可得 } f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1) =$$

$$0, \therefore f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x).$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{9}\right) + f\left(\frac{1}{5}\right) = -f(9) - f(5) = 6,$$

$$\text{即 } f(9) + f(5) = -6.$$

$$\text{令 } y = x, \text{ 可得 } 2f(x) = f(x^2),$$

$$\therefore f(2\,025) = f(9^2 \times 5^2) = f(9^2) + f(5^2) = 2f(9) + 2f(5) = 2[f(9) + f(5)] = -12.$$

故选 D.

- 14. A** 【解析】由题意得 
$$\begin{cases} 3-a > 1, \\ a > 1, \\ (3-a)^1 - a \leq \log_a 1, \end{cases}$$



解得  $a \in \left[ \frac{3}{2}, 2 \right)$ . 故选 A.

**易错警示** 忽略分段函数在分段处的端点值的大小关系致错

分段函数具有单调性, 要求各段函数的单调性保持一致, 同时分段处的端点值的大小关系也是确定的.

- 15. C** 【解析】因为函数  $y = \ln x$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 函数  $y = -\frac{1}{x}$  在  $(0, +\infty)$  上也单调递增, 故函数  $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 所以只需  $1-x > 2x-1 > 0$ , 得  $\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$ . 故选 C.

- 16.  $\frac{5}{2}$  或 3** 【解析】当  $0 < a < 1$  时,  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上单调递减, 由题意有

$$\begin{cases} f(1) = b = 2, \\ f(2) = \log_a 2 + b = 1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = \frac{1}{2}, \\ b = 2, \end{cases} \text{ 符合题意, 此时 } a+b = \frac{5}{2};$$

当  $a > 1$  时,  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上单调递增, 由题意有

$$\begin{cases} f(1) = b = 1, \\ f(2) = \log_a 2 + b = 2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = 2, \\ b = 1, \end{cases} \text{ 符合题意, 此时 } a+b = 3.$$

综上所述,  $a+b$  的值为  $\frac{5}{2}$  或 3.

**易错警示** 忽略对底数含参的对数(型)函数的讨论

对数(型)函数中, 若底数中含有字母参数, 且根据已知条件无法明确底数的范围时, 一般分底数在  $(0, 1)$  上和  $(1, +\infty)$  上两种情况进行讨论.

- 17. (1)  $[0, 1)$  (2)  $[0, 1]$**  【解析】(1) 函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 即真数恒大于 0,

$$\text{则 } a = 0 \text{ 或 } \begin{cases} a > 0, \\ \Delta = 4a^2 - 4a < 0, \end{cases} \text{ 得 } 0 \leq a < 1, \text{ 所以 } a \text{ 的取值范围是 } [0, 1).$$

(2) 函数  $f(x)$  的值域为  $\mathbf{R}$ , 即真数能取遍  $(0, +\infty)$  上的数, 则  $a = 0$  或

$$\begin{cases} a > 0, \\ \Delta = 4 - 4a \geq 0, \end{cases} \text{ 解得 } 0 \leq a \leq 1, \text{ 所以 } a \text{ 的取值范围是 } [0, 1].$$

- 18.  $\left(0, \frac{1}{4}\right) \cup (4, +\infty)$**  【解析】当  $a > 1$  时,  $f$

$(x) = \log_a x$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

因为对  $\forall x_1, x_2 \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ , 都有  $f(x_1) -$





$$f(x_2) < 1,$$

$$\text{所以 } f(2) - f\left(\frac{1}{2}\right) < 1, \text{ 所以 } \log_a 2 - \log_a$$

$$\frac{1}{2} < 1,$$

$$\text{所以 } \log_a 4 < 1, \text{ 解得 } a > 4;$$

当  $0 < a < 1$  时,  $f(x) = \log_a x$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减,

$$\text{因为对 } \forall x_1, x_2 \in \left[\frac{1}{2}, 2\right], \text{ 都有 } f(x_1) - f(x_2) < 1,$$

$$\text{所以 } f\left(\frac{1}{2}\right) - f(2) < 1, \text{ 所以 } \log_a \frac{1}{2} - \log_a 2 < 1,$$

$$\text{所以 } \log_a \frac{1}{4} < 1, \text{ 解得 } 0 < a < \frac{1}{4}.$$

综上,  $a$  的取值范围为  $\left(0, \frac{1}{4}\right) \cup (4, +\infty)$ .

- 19. B** 【解析】因为反函数图象过点  $(4, 2)$ , 故原相应函数的图象过点  $(2, 4)$ , 所以  $a^2 = 4$ , 故  $a = 2$  或  $a = -2$  (舍), 故选 B.

- 20. D** 【解析】由于函数  $f(x)$  的图象与函数  $y = 2^x$  的图象关于直线  $y = x$  对称, 则  $f(x) = \log_2 x$ . 所以当  $x > 0$  时,  $h(x) = \log_2 x - x$ , 则  $h(8) = \log_2 8 - 8 = -5$ , 又  $h(x)$  为奇函数, 所以  $h(-8) = -h(8) = 5$ . 故选 D.



### 对点上分

- 1. C** 【解析】因为  $a = \log_3 2 > \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$ ,  $b = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$ ,

$$\text{所以 } a > b, \text{ 而 } b = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{4}},$$

$$c = \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\text{令 } f(x) = \left(\frac{1}{25}\right)^x, \text{ 则 } b = f\left(\frac{1}{4}\right), c = f\left(\frac{1}{3}\right)$$

由指数函数性质得  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递减,

因为  $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ , 所以  $c < b$ . 综上可得  $c < b < a$ , 故选 C.

- 2. B** 【解析】易知  $\left(\frac{1}{2}\right)^m > \left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow m < n$ ,

$$\text{且 } \log_2 m < \log_2 n \Leftrightarrow 0 < m < n,$$

$m < n$  显然推不出  $0 < m < n$ , 而由  $0 < m < n$  可推出  $m < n$ .

故“ $\left(\frac{1}{2}\right)^m > \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ”是“ $\log_2 m < \log_2 n$ ”的必



要不充分条件. 故选 B.

3. D 【解析】 $9^a - \log_6(6b) = 3^b - \log_6(2a)$ , 即

$$3^{2a} + \log_6(2a) = 3^b + \log_6(6b),$$

设  $f(x) = 3^x + \log_6 x$ , 易知函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增.

①  $3^{2a} + \log_6(2a) = 3^b + \log_6(6b) > 3^b + \log_6 b$ ,  
即  $f(2a) > f(b)$ , 故  $2a > b$ ;

②  $3^{2a} + \log_6(2a) = 3^b + \log_6(6b) < 3^{6b} + \log_6 6b$ ,  
即  $f(2a) < f(6b)$ , 故  $2a < 6b$ .

综上所述,  $\frac{1}{2}b < a < 3b$ . 故选 D.

4. B 【解析】函数  $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$  的定义

域为  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  且  $f(-x) = \ln$

$$\left[1 + \frac{1}{(-x)^2}\right] = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = f(x), \text{ 所以函数}$$

$f(x)$  为偶函数. 设  $t = 1 + \frac{1}{x^2}$ , 则  $y = \ln t$ .

因为函数  $y = \ln t$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

函数  $t = 1 + \frac{1}{x^2}$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 所

以函数  $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$  在  $(0, +\infty)$  上单  
调递减.

$$a = f\left(\log_3 \frac{1}{2}\right) = f(-\log_3 2) = f(\log_3 2).$$

由  $0 < \log_3 2 < \log_3 3 = 1, 1 < 2^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{6}} < 9^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{3}}$ ,

得  $0 < \log_3 2 < 2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}}$ , 所以  $f(\log_3 2) >$   
 $f(2^{\frac{1}{2}}) > f(3^{\frac{1}{3}})$ , 即  $a > b > c$ . 故选 B.

5. C 【解析】对于 A, B 选项, 由函数  $y =$

$\log_a(x+1)$  单调递增可知  $a > 1$ , 此时抛物线

$y = x^2 - 2ax + 1$  的对称轴为直线  $x = a (a > 1)$ ,

且对应方程的判别式  $\Delta = 4(a^2 - 1) > 0$ , 即

抛物线  $y = x^2 - 2ax + 1$  与  $x$  轴有两个交点,

且与  $y$  轴交于点  $(0, 1)$ , 故 A, B 选项错误;

对于 C, D 选项, 由函数  $y = \log_a(x+1)$  单调

递减可知  $0 < a < 1$ , 此时抛物线  $y = x^2 - 2ax +$

$1$  的对称轴为直线  $x = a (0 < a < 1)$ , 且对应

方程的判别式  $\Delta = 4(a^2 - 1) < 0$ , 即抛物线

$y = x^2 - 2ax + 1$  与  $x$  轴没有交点, 故 C 选项

正确, D 选项错误. 故选 C.

6. C 【解析】函数  $f(x) = \ln[1 + (1-x)^2]$  定

义域为  $\mathbf{R}$ , 其图象对称轴为直线  $x = 1$ , 函

数  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 在  $(-\infty,$

$1)$  上单调递减. 又  $t^2 + 2t + 4 = (t+1)^2 + 3 \geq$

$3$ , 即对于任意  $t \in \mathbf{R}, f(t^2 + 2t + 4) \geq f(3)$ ,

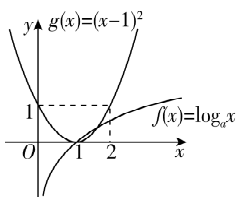
则依题意, 有  $f(k) < f(3)$ .



由对称轴直线  $x=1$  可知  $|k-1|<|3-1|$ , 解得  $-1<k<3$ , 所以实数  $k$  的取值范围是  $(-1, 3)$ . 故选 C.

**7. B** 【解析】若  $0<a<1$ , 则当  $x \in (1, 2]$  时,  $\log_a x < 0$ , 而  $(x-1)^2 > 0$ , 故  $(x-1)^2 < \log_a x$  无解; 若  $a>1$ , 则当  $x \in (1, 2]$  时,  $\log_a x > 0$ , 且  $(x-1)^2 > 0$ .

令  $f(x) = \log_a x$ ,  $g(x) = (x-1)^2$ , 作出两函数的图象如图所示,



要想  $(x-1)^2 < \log_a x$  在  $x \in (1, 2]$  上恒成立, 则  $\log_a 2 > 1$ , 解得  $1 < a < 2$ .

综上, 实数  $a$  的取值范围为  $(1, 2)$ .

故选 B.

**8. D** 【解析】因为  $y = \frac{1}{2^x} - a$  在  $[-2, 0]$  上单

调递减, 所以  $\frac{1}{2^x} - a \in [1-a, 4-a]$ , 则

$$f(x) \in [\log_2(1-a), \log_2(4-a)].$$

又存在  $x_1, x_2 \in [-2, 0]$ , 使  $|f(x_1) - f(x_2)| \geq 3$ , 则只需  $f(x)_{\max} - f(x)_{\min} \geq 3$ , 而  $f(x)_{\max} - f(x)_{\min} = \log_2(4-a) - \log_2(1-a) =$

$$\log_2 \frac{4-a}{1-a} \geq 3 = \log_2 8, \text{ 故 } \begin{cases} \frac{4-a}{1-a} \geq 8, \\ 1-a > 0, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{4}{7} \leq$$

$a < 1$ , 故选 D.

**9. D** 【解析】由  $f(x) = \ln|2x+1| - \ln|2x-1|$

得  $f(x)$  的定义域为  $\left\{x \mid x \neq \pm \frac{1}{2}\right\}$ , 关于坐

标原点对称. 又  $f(-x) = \ln|1-2x| - \ln|-2x-1| = \ln|2x-1| - \ln|2x+1| = -f(x)$ ,  $\therefore f(x)$  为定义域上的奇函数, 故 A, C 错误;

当  $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  时,  $f(x) = \ln(2x+1) -$

$\ln(1-2x)$ ,  $\therefore y = \ln(2x+1)$  在  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  上

单调递增,  $y = \ln(1-2x)$  在  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  上单

调递减,  $\therefore f(x)$  在  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  上单调递增,

故 B 错误;

当  $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$  时,  $f(x) = \ln(-2x-1) -$

$\ln(1-2x) = \ln \frac{2x+1}{2x-1} = \ln\left(1 + \frac{2}{2x-1}\right)$ , 令  $\mu =$



$1 + \frac{2}{2x-1}$ , 则  $\mu$  在  $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$  上单调递减,  
 $f(\mu) = \ln \mu$  在定义域内单调递增, 根据复合函数单调性可知  $f(x)$  在  $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$  上  
 单调递减, D 正确. 故选 D.

**10. ABD** 【解析】将  $I = 1 \text{ W/m}^2$  代入  $\eta = 10 \lg \frac{I}{I_0}$  得  $10 \lg \frac{I}{I_0} = 120$ , 则  $I_0 = \frac{I}{10^{12}} = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ , 故 A 正确;

当  $\eta = 10 \lg \frac{I}{I_0} \in [70, 80]$  时,  $\frac{I}{I_0} = 10^{\frac{\eta}{10}} \in [10^7, 10^8]$ , 代入  $I_0$  可知  $I \in [10^{-5}, 10^{-4}]$ , 故 B 正确;

令  $I_1 = 2I$ , 则  $\eta_1 = 10 \lg \frac{2I}{I_0} = 10 \lg 2 + \eta \neq 2\eta$ , 故 C 错误;

令  $\eta_2 = \eta + 10$ , 则  $\frac{I_2}{I_0} = 10^{\frac{\eta_2}{10}} = 10^{\frac{\eta}{10} + 1} = 10 \times \frac{I}{I_0}$ , 故  $I_2 = 10I$ , 故 D 正确. 故选 ABD.

**11. ABD** 【解析】A 选项, 若  $f(x)$  为偶函数, 则  $f(-x) = f(x)$ , 即  $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2ax + 2) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2ax + 2)$ , 则  $x^2 + 2ax + 2 = x^2 - 2ax + 2$ , 所以  $a = 0$ , 经检验,  $a = 0$  符合题意, 故 A 正确;

B 选项, 若  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 则  $x^2 - 2ax + 2 > 0$  恒成立, 只需  $\Delta = 4a^2 - 8 < 0$ , 解得  $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$ , 故 B 正确;

C 选项, 若  $f(x)$  在区间  $(-\infty, 1)$  上单调递增, 根据复合函数单调性, 只需  $y = x^2 - 2ax + 2$  在区间  $(-\infty, 1)$  上单调递减, 且恒

大于零, 因此  $\begin{cases} a \geq 1, \\ 1^2 - 2a + 2 \geq 0, \end{cases}$  解得  $1 \leq a \leq \frac{3}{2}$ , 故 C 错误;

D 选项, 若  $f(x)$  的值域是  $(-\infty, 2]$ , 即  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2ax + 2)$  的最大值为 2, 因此只需  $y = x^2 - 2ax + 2 = (x - a)^2 - a^2 + 2$  的最小值为  $\frac{1}{4}$ , 即  $-a^2 + 2 = \frac{1}{4}$ , 解得  $a = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$ , 故 D 正确. 故选 ABD.

**12. C** 【解析】因为函数  $f(x)$  与  $g(x) = \log_2 x$  互为反函数, 所以  $f(x) = 2^x$ .

由  $f(-m) - f(-n) > m - n$ , 得到  $2^{-m} - 2^{-n} > m - n$ , 即  $2^{-m} - m > 2^{-n} - n$ ,

即  $\left(\frac{1}{2}\right)^m - m > \left(\frac{1}{2}\right)^n - n$ , 令  $h(x) =$



$\left(\frac{1}{2}\right)^x - x$ , 则  $h(m) > h(n)$ ,

又函数  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  和  $y = -x$  在  $\mathbf{R}$  上均单调递减,

所以  $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - x$  在  $\mathbf{R}$  上单调递减,

所以  $m < n$ , 所以  $n - m > 0$ ,

所以  $|m - n| > 0, n - m + 1 > 1$ .

因为  $g(x) = \log_2 x$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

所以  $\log_2(n - m + 1) > \log_2 1 = 0, \log_2 |m - n|$

可能为正, 可能为负, 也可能等于 0,

所以 A, B, D 错误, C 正确. 故选 C.

13.  $\{a \mid a \geqslant 2\}$  【解析】 $\exists x_1 \in [2,$

$+\infty), \forall x_2 \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$ , 有  $f(x_1) \leqslant g(x_2)$

等价于当  $x_1 \in [2, +\infty), x_2 \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$

时,  $f(x_1)_{\min} \leqslant g(x_2)_{\min}$ .

$\because$  当  $x \in [2, +\infty)$  时,  $x^2 - 1 \geqslant 3$ , 且  $y =$

$\log_3 x$  在定义域内单调递增, 则  $\log_3(x^2 -$

$1) \geqslant \log_3 3 = 1, \therefore$  函数  $f(x) = \log_3(x^2 - 1)$

在  $[2, +\infty)$  上的最小值  $f(x)_{\min} =$

$f(2) = 1$ .

又  $\because g(x) = x^2 - 2x + a$  的图象开口向上且

对称轴为直线  $x = 1 \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$ , 则  $g(x)$  在

$\left[\frac{1}{3}, 3\right]$  上的最小值  $g(x)_{\min} = g(1) = a -$

$1, \therefore 1 \leqslant a - 1$ , 解得  $a \geqslant 2$ .

14. 【解】(1) 由题可知  $f(3) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1-3a}{3-1} = -1$ ,

所以  $\frac{1-3a}{2} = 2, a = -1$ , 所以  $f(x) =$

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{x-1}$ .

当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $f(x) + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) < m$

恒成立, 即  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{x-1} + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) < m$ , 所以

$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) < m$  在  $(1, +\infty)$  上恒成立.

又因为  $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$ , 所

以  $m \geqslant -1$ , 即实数  $m$  的取值范围是

$\{m \mid m \geqslant -1\}$ .

(2) 令  $u = \frac{1+x}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$ , 则  $u = 1 + \frac{2}{x-1}$

在  $[2, 3]$  上单调递减, 又  $y = \log_{\frac{1}{2}} u$  在  $[2,$

$3]$  上单调递减, 所以  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1+x}{x-1}$



在  $[2, 3]$  上单调递增, 令  $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+k)$ , 则  $g(x)$  在  $[2, 3]$  上单调递减, 所以只需要  $\begin{cases} f(2) \leq g(2), \\ f(3) \geq g(3), \end{cases}$  即可使关于  $x$  的方程  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+k)$  在  $[2, 3]$  上有解,

$$\text{即} \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} 3 \leq \log_{\frac{1}{2}}(2+k), \\ \log_{\frac{1}{2}} 2 \geq \log_{\frac{1}{2}}(3+k), \end{cases} \text{解得 } -1 \leq k \leq 1,$$

即  $k$  的取值范围是  $\{k | -1 \leq k \leq 1\}$ .



### 综合上分

**15. ACD** 【解析】对于 D, 构造  $f(x) = x + \ln x - 4$ , 易得  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

$$\text{而 } f(e) = e + \ln e - 4 = e - 3 < 0, f(3) = 3 + \ln 3 - 4 = \ln 3 - 1 > 0,$$

所以  $f(x) = 0$  有唯一的正根, 且该根位于区间  $(e, 3)$  内,

 **提示:** 零点存在定理在 4.5 节介绍

因为  $a + e^a = b + \ln b = 4$ , 所以  $f(e^a) = f(b) = 0$ ,

则  $e^a = b \in (e, 3)$ , 故  $a \in (1, \ln 3)$ ,  $b \in (e, 3)$ .

所以  $ab > 1 \cdot e = e$ , 故 D 正确.

对于 C,  $e^a = b$ ,  $a + e^a = 4$ , 故  $a + b = 4$ , 而  $b > e > \ln 3 > a$ ,

$$\text{所以有 } ab = \frac{1}{4} [(a+b)^2 - (a-b)^2] <$$

$$\frac{1}{4}(a+b)^2 = \frac{1}{4} \times 4^2 = 4, \text{ 故 C 正确.}$$

对于 A, B,  $a \ln b + b \ln a > a \ln b > 1 \cdot \ln e = 1$ , 故 A 正确, B 错误.

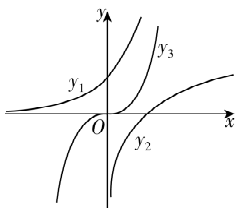
故选 ACD.

## 4.4.3 不同函数增长的差异



### 基础上分

**1. A** 【解析】在同一坐标系中画出  $y_1 = 3^x$ ,  $y_2 = \log_3 x$ ,  $y_3 = x^3$  的大致图象, 如图所示:



结合图象, 当  $x \in (0, +\infty)$  时, 函数  $y_1, y_2, y_3$  均单调递增, A 正确;

当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $y_2$  的增长速度不是一直快于  $y_3$ , B 错误;



当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $y_1$  的增长速度不是一直快于  $y_2$ , **C 错误**;

当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $y_3$  的增长速度不是一直快于  $y_1$ , **D 错误**. 故选 **A**.

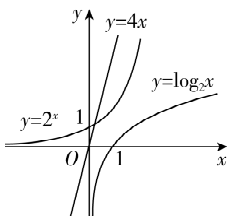
**2. AB** 【解析】对于 A, 由对数函数的性质知, 函数  $y = \log_{\frac{1}{5}} x$  减小的速度越来越慢,

**选项 A 正确**;

对于 B, 由指数函数的性质知, 指数函数  $y = a^x (a > 1)$  中, 当  $x > 0$  时, 底数  $a$  越大, 其增长速度越快, **选项 B 正确**;

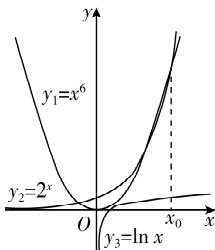
对于 C, 由指数函数的性质知, 随着  $x$  的增大,  $y = 1.1^x$  的增长速度越来越快, 将会远远超过幂函数  $y = x^{100}$  的增长速度, 因此一定存在一个实数  $m$ , 使得当  $x > m$  时,  $1.1^x > x^{100}$ , **选项 C 不正确**;

对于 D, 取  $a = 2, k = 4$ , 由图知, 在区间  $(0, +\infty)$  内, 对任意的  $x$ ,  $\log_a x < kx < a^x$  不成立, **选项 D 不正确**. 故选 **AB**.



**3. C** 【解析】根据幂函数、指数函数、对数函数的性质和图象的特点, 可知  $a, c$  对应的函数分别是幂指数大于 1 和幂指数大于 0 小于 1 的幂函数,  $b, d$  对应的函数分别为底数大于 1 和底数大于 0 小于 1 的指数函数. 故选 **C**.

**4. ABC** 【解析】作出函数  $y_1 = x^6, y_2 = 2^x, y_3 = \ln x$  的大致图象, 如图所示,



由图象知, 对任意的  $x > 0, y_1 > y_3, y_2 > y_3$ , **A, B 正确**;

由于函数  $y_2 = 2^x$  呈爆炸式增长, 当  $x$  增大到一定程度后  $y_2 = 2^x$  的函数值将会超过  $y_1 = x^6$  的函数值, 并一直持续, 即一定存在  $x_0$ , 当  $x > x_0$  时, 总有  $y_2 > y_1 > y_3$ , **C 正确**;

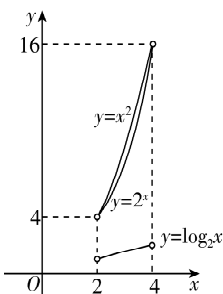
当  $x \leq 0$  时,  $y_1 = x^6$  与  $y_2 = 2^x$  的图象有一个交点,



当  $x > 0$  时,  $y_1 = x^6$  与  $y_2 = 2^x$  的图象有 2 个交点, 一共有 3 个交点, D 错误.

故选 ABC.

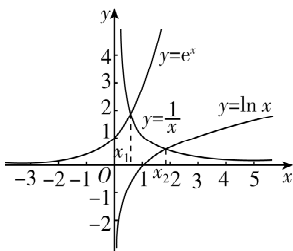
5. B 【解析】在平面直角坐标系中作出  $y = 2^x$ ,  $y = x^2$ ,  $y = \log_2 x$  在  $(2, 4)$  上的大致图象如图所示.



由图象可知, 当  $x \in (2, 4)$  时,  $x^2 > 2^x > \log_2 x$ , 故选 B.

6. ①②⑤ 【解析】设  $\ln x = e^y = \frac{1}{z} = k, k > 0$ ,

则  $x = e^k, y = \ln k, z = \frac{1}{k}$ , 分别画出函数  $y = e^x, y = \ln x, y = \frac{1}{x}$  的图象, 如图所示.



设  $y = e^x$  与  $y = \frac{1}{x}$  图象交点的横坐标为  $x_1$ ,

$y = \frac{1}{x}$  与  $y = \ln x$  图象交点的横坐标为  $x_2$ ,

根据图象可知, 当  $0 < k < x_1$  时,  $z > x > y$ ; 当  $k = x_1$  时,  $z = x > y$ ; 当  $x_1 < k < x_2$  时,  $x > z > y$ ; 当  $k = x_2$  时,  $x > z = y$ ; 当  $k > x_2$  时,  $x > y > z$ . 故答案为 ①②⑤.

7. B 【解析】由表中数据可知函数模型满足: ①定义域为  $[0, 120]$ ; ②在定义域内单调递增; ③函数图象过原点.

函数  $Q = \frac{1}{v+1} + b$  和  $Q = 0.5^v + a$  在定义域内

单调递减, 不符合条件②, 故 A, C 错误;

函数  $Q = k \log_a v + b$  中, 0 不在函数的定义域中, 故 D 错误;

$Q = av^3 + bv^2 + cv$  满足上述三点, 故 B 正确.

故选 B.

8. D 【解析】对 A, 由题图可知, 当注入时间在 3 小时以内(含 3 小时)时, 方案一的注





入量大于其他两种方案,故 A 正确;

对 B,当注入时间恰为 4 小时时,由题图可知,方案三的注入量小于其他两种方案,故 B 正确;

对 C,当注入时间恰为 6 小时时,方案二的注入量大于其他两种方案,故 C 正确;

对 D,当注入时间恰为 10 小时时,由题图可知方案三的注入量最大,故应选择方案三,故 D 错误. 故选 D.

## 4.5 函数的应用(二)

### 4.5.1 函数的零点与方程的解



#### 基础上分

1. D 【解析】令  $y = x^2 + 3x + 2 = 0$ , 解得  $x = -1$  或  $x = -2$ , 由零点定义可得函数  $y = x^2 + 3x + 2$  的零点是  $-1, -2$ . 故选 D.

**易错警示** 不能正确理解函数零点的概念而致错

函数的零点不是一个点的坐标, 而是函数解析式对应方程的根(或函数图象与  $x$  轴交点的横坐标), 因此本题中应选 D 而不是选 C.

2. C 【解析】对于 A,  $f(x) = x^3$  在  $(1, 2)$  上单调递增, 且  $f(1) = 1 > 0$ , 故  $f(x) = x^3$  在  $(1, 2)$  内无零点, 故 A 错误;

对于 B,  $f(x) = x + \ln x$  在  $(1, 2)$  上单调递增且  $f(1) = 1 > 0$ , 故  $f(x) = x + \ln x$  在  $(1, 2)$  内无零点, 故 B 错误;

对于 C, 由  $f(x) = x^2 - 2 = 0$ , 解得  $x = \pm\sqrt{2}$ , 所以  $f(x)$  在  $(1, 2)$  内有零点  $\sqrt{2}$ , 故 C 正确;

对于 D,  $f(x) = x^2 + \ln x$  在  $(1, 2)$  上单调递增, 且  $f(1) = 1 > 0$ , 故 D 错误. 故选 C.

3. A 【解析】由  $x_0$  是函数  $f(x) = 3^x + (1-a)x - \log_3(ax)$  的零点可知,  $3^{x_0} + (1-a)x_0 - \log_3(ax_0) = 0$ , 整理得  $3^{x_0} + x_0 = \log_3(ax_0) + ax_0$ , 即  $3^{x_0} + x_0 = \log_3(ax_0) + 3^{\log_3(ax_0)}$ .

设  $g(x) = 3^x + x$ , 易知  $g(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 因为  $g(x_0) = g(\log_3(ax_0))$ , 所以  $x_0 = \log_3(ax_0)$ , 所以  $ax_0 = 3^{x_0}$ , 故  $\frac{ax_0}{3^{x_0+1}} = \frac{ax_0}{3 \cdot 3^{x_0}} =$

$\frac{1}{3}$ , 故选 A.

#### 4. C



#### 思路导引

将求零点问题转化为解方程  $f(x) = 0$ , 分段函数的零点需要分段求解.



【解析】当  $x \leq 1$  时, 令  $f(x) = 0$ , 解得  $x = \log_3 2$ ; 当  $x > 1$  时, 令  $f(x) = 0$ , 解得  $x = 1$  (舍), 所以  $f(x)$  的零点为  $\log_3 2$ . 故选 C.

5. C 【解析】由题意得,  $f(x_1) = x_1 2^{x_1} - 1 = 0$ ,

$$\text{即 } 2^{x_1} = \frac{1}{x_1} (x_1 > 0),$$

$$g(x_2) = x_2 - 2^{\frac{1}{x_2}} = 0, \text{ 即 } x_2 = 2^{\frac{1}{x_2}}, \text{ 令 } t = \frac{1}{x_2} (t >$$

$$0), \text{ 则 } 2^t = \frac{1}{t},$$

故  $x_1, t$  都为方程  $2^x - \frac{1}{x} = 0$  的解,

令  $h(x) = 2^x - \frac{1}{x} (x > 0)$ ,  $\therefore$  函数  $y = 2^x$  单调

递增, 函数  $y = -\frac{1}{x}$  也单调递增, 故  $h(x)$  在

$(0, +\infty)$  上单调递增,

$$\text{又 } h\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} - 2 < 0, h(1) = 2 - 1 > 0, \therefore$$

$$x_1 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

对于 B,  $x_1 = t = \frac{1}{x_2}$ , 即  $x_1 x_2 = 1$ , 故 B 错误;

对于 A,  $x_1 + x_2 = x_1 + \frac{1}{x_1}$ , 由对勾函数的性质

$$\text{知 } x_1 + \frac{1}{x_1} > 1 + 1 = 2, x_1 + \frac{1}{x_1} < \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2},$$

$$\therefore x_1 + x_2 \in \left(2, \frac{5}{2}\right), \text{ 故 A 错误;}$$

对于 C,  $\therefore 2^{x_1} = \frac{1}{x_1}$ , 两边同时取以 2 为底的

$$\text{对数得 } \log_2 2^{x_1} = \log_2 \frac{1}{x_1} \Rightarrow x_1 = \log_2 x_2, \therefore 2^{x_1} +$$

$$\log_2 x_2 = \frac{1}{x_1} + x_1 \in \left(2, \frac{5}{2}\right), \text{ 故 C 正确;}$$

$$\text{对于 D, } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1} + x_1 \in \left(2, \frac{5}{2}\right), \text{ 故 D}$$

错误.

故选 C.

6. D 【解析】不妨设  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$  当

$$a = -1, b = 1 \text{ 时, } f(-1)f(1) = -1 \times 1 = -1 < 0,$$

但  $f(x)$  在  $(-1, 1)$  上没有零点. 所以“函数  $f(x)$  满足  $f(a)f(b) < 0$ ”不能推出“函数  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  上有零点”, 充分性不成立.

若函数  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  上有零点, 例如

函数  $f(x) = x^2$  在区间  $(-1, 1)$  上有零点  $x =$

0, 此时  $f(-1)f(1) = 1 \times 1 = 1 > 0$ . 这说明

“函数  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  上有零点”不能



推出“函数  $f(x)$  满足  $f(a)f(b) < 0$ ”, 必要性不成立.

所以“函数  $f(x)$  满足  $f(a)f(b) < 0$ ”是“函数  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  上有零点”的既不充分也不必要条件. **故选 D.**

- 7. BC** 【解析】函数  $y=f(x)$  的图象是一条连续不断的曲线,  
且由表格数据可知  $f(2)f(3) < 0$ , 即函数  $f(x)$  在区间  $(2, 3)$  内存在零点;  
同理  $f(3)f(4) < 0, f(4)f(5) < 0$ , 因此函数  $f(x)$  在区间  $(3, 4), (4, 5)$  内均存在零点.  
**故选 BC.**

- 8. B** 【解析】因为当  $x \in (1, 2)$  时,  $f(x) < 0$ ,  
 $f(2) = 2\ln 1 + 2 - 3 = -1 < 0$ ,  
 $f(3) = 3\ln 2 + 3 - 3 = 3\ln 2 > 0$ ,  
当  $x > 3$  时,  $f(x) > 0$ ,  
所以函数  $f(x)$  的零点所在的大致区间为  $(2, 3)$ , **故选 B.**

- 9. B** 【解析】原方程等价于  $\frac{2^x}{4^x} + \frac{3^x}{4^x} = 1$ , 即  
 $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{4}\right)^x - 1 = 0$ . 设  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{4}\right)^x - 1$ , 因为  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$  均为  $\mathbf{R}$  上的减函数, 所以  $f(x)$  为  $\mathbf{R}$  上的减函数, 而  $f(0) = 1 > 0, f(2) = \frac{1}{4} + \frac{9}{16} - 1 = -\frac{3}{16} < 0$ , 所以  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上仅有 1 个零点, 即原方程只有 1 个实数解. **故选 B.**

- 10. 2** 【解析】 $\because$  函数  $f(x) = 2^x - 5$  是连续的单调递增函数, 且  $f(2) = -1 < 0, f(3) = 3 > 0, \therefore f(x)$  在区间  $[2, 3]$  上有唯一零点,  $\therefore f(m+1) = 2^{m+1} - 5 > 0, f(m) = 2^m - 5 < 0 (m \in \mathbf{N}), \therefore m = 2$ .

# 11. D



**思路导引** 根据函数的单调性和零点存在定理得到端点函数值的正负情况, 列出不等式组求解即可.

**【解析】**函数  $f(x) = 2^x + \log_2(x-1) - \frac{a}{2}$  在定义域  $(1, +\infty)$  上连续且单调递增, 已知函数零点在区间  $(2, 3)$  内, 则  $f(2) < 0, f$

$$(3) > 0, \text{ 所以 } \begin{cases} 2^2 - \frac{a}{2} < 0, \\ 2^3 + 1 - \frac{a}{2} > 0, \end{cases} \quad \text{解得 } 8 < a < 17$$

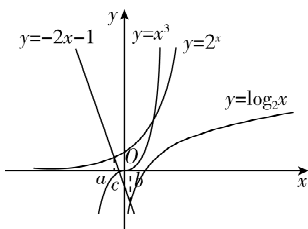
18. **故选 D.**



- 12. B** 【解析】当  $x > 0$  时,  $f(x) = 1 + \ln x$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 且值域为  $\mathbf{R}$ , 所以  $1 + \ln x - k = 0$  必有唯一解; 所以当  $x \leq 0$  时,  $x^2 + 2x + 2 - k = 0$  有两个不同的根, 即  $x^2 + 2x + 2 - k = 0$  有两个不同的非正根, 设两根为  $x_1, x_2$ , 即  $\Delta = 4 - 4 \times (2 - k) > 0$ , 解得  $k > 1$ , 由  $x_1 + x_2 = -2 < 0$ , 则  $x_1 x_2 = 2 - k \geq 0$ , 解得  $k \leq 2$ . 综上所述,  $k$  的取值范围为  $(1, 2]$ , 故选 B.

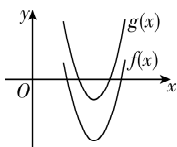
**13. C****思路导引** 将问题转换成比较 $y = 2^x, y = \log_2 x, y = x^3$  的图象分别与  $y = -2x - 1$  的图象的交点的横坐标的大小即可判断.

【解析】分别令  $f(x) = 0, g(x) = 0, h(x) = 0$ , 得  $2^x = -2x - 1, \log_2 x = -2x - 1, x^3 = -2x - 1$ , 则  $a$  为函数  $y = 2^x$  与  $y = -2x - 1$  的图象的交点的横坐标,  $b$  为函数  $y = \log_2 x$  与  $y = -2x - 1$  的图象的交点的横坐标,  $c$  为函数  $y = x^3$  与  $y = -2x - 1$  的图象的交点的横坐标. 在同一直角坐标系中, 分别作出  $y = 2^x, y = \log_2 x, y = x^3$  和  $y = -2x - 1$  的图象如图所示, 由图可知,  $b > c > a$ . 故选 C.

**14. A**

**思路导引** 由  $g(x) = (x - a)(x - b)$  的图象向下平移 2 个单位长度可得到  $f(x) = g(x) - 2$  的图象, 故可在同一平面直角坐标系内作出函数  $f(x), g(x)$  的大致图象, 数形结合进行求解.

【解析】由函数  $f(x) = (x - a)(x - b) - 2$  的零点分别为  $\alpha, \beta$ , 得  $f(\alpha) = 0, f(\beta) = 0$ . 令  $g(x) = (x - a)(x - b)$ , 则  $g(a) = 0, g(b) = 0$ , 而  $f(x) = g(x) - 2$ , 则  $f(x)$  的图象可由  $g(x) = (x - a)(x - b)$  的图象向下平移 2 个单位长度得到, 故可作出函数  $f(x), g(x)$  的大致图象如图所示.



由图可知  $a, b$  应介于  $\alpha, \beta$  两数之间, 结合选项可知可能的结果为  $\alpha < a < b < \beta$ . 故选 A.

15. D 【解析】若  $m=0$ , 则  $f(x) = -x-1$ , 它的零点为  $-1 \in (-2, 2)$ , 故  $m=0$  符合题意. 若  $m \neq 0$ , 函数  $f(x) = 2mx^2 - x - 1$  在区间  $(-2, 2)$  内恰有一个零点需满足:

$$\textcircled{1} f(-2) \cdot f(2) < 0 \text{ 或 } \textcircled{2} \begin{cases} f(-2) = 0, \\ -2 < \frac{1}{4m} < 0 \end{cases} \text{ 或}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} f(2) = 0, \\ 0 < \frac{1}{4m} < 2. \end{cases}$$

解①得  $-\frac{1}{8} < m < 0$  或  $0 < m < \frac{3}{8}$ ; ②无解;

解③得  $m = \frac{3}{8}$ .

综上,  $m$  的取值范围是  $\left(-\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right]$ . 故 D

正确.

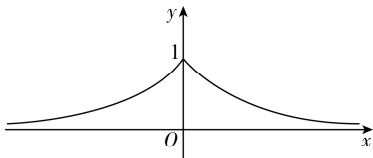
**易错警示** 忽略含参函数的分类讨论而致错

解此类二次项带参数问题, 容易忽视对二次项系数进行分类讨论, 直接把  $f(x) = 2mx^2 - x - 1$  当作二次函数处理, 遗漏了  $m=0$  时的情况, 导致漏解.

16. A 【解析】函数  $F(x)$  的零点个数, 即直线  $y=2m$  与  $g(x) = f(x) \otimes \frac{1}{f(x)}$  图象的交点个数,

$$\text{由题意知 } g(x) = \begin{cases} 3^x, & x < 0, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x, & x \geq 0, \end{cases} \text{ 其大致}$$

图象如图所示,



若直线  $y=2m$  与  $y=g(x)$  的图象有两个交点, 则  $0 < 2m < 1$ , 即  $0 < m < \frac{1}{2}$ . 故选 A.

17. A

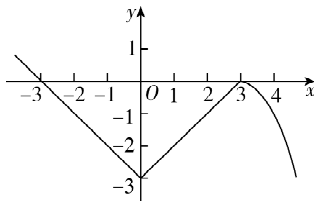


**思路导引**

令  $f(x) = t$ , 则方程  $[f(x)]^2 - af(x) + 2 = 0$  有 6 个不同的实数根等价于  $t^2 - at + 2 = 0$  有 2 个不同的实数解  $t_1, t_2$ , 再结合二次函数的性质求解即可.



【解析】作出  $f(x)$  的大致图象, 如图所示,



令  $f(x) = t$ , 则方程  $[f(x)]^2 - af(x) + 2 = 0$  有 6 个不同的实数根等价于  $t^2 - at + 2 = 0$  有 2 个不同的实数解  $t_1, t_2$ , 且  $t_1, t_2 \in$

$$(-3, 0), \text{ 则 } \begin{cases} a^2 - 8 > 0, \\ 9 + 3a + 2 > 0, \\ -3 < \frac{a}{2} < 0, \end{cases} \text{ 解得 } -\frac{11}{3} < a <$$

$-2\sqrt{2}$ , 故选 A.

### 18. BCD



**思路导引** 作出  $f(x)$  的大致图象, 根据图象对选项进行分析, 并结合基本不等式求得正确答案.

【解析】作出  $f(x)$  的大致图象如图所示.

若方程  $f(x) = k$  有三个不相等的实数解, 则根据图象可得  $k \in (-4, -3]$ , 且  $x_1 + x_2 = -2$ , 故 A 错误;

令  $-2 + \ln x = -3$ , 得  $x = \frac{1}{e}$ ; 令  $-2 + \ln x =$

$-4$ , 得  $x = \frac{1}{e^2}$ , 则  $x_3 \in \left(\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}\right]$ , 故 B

正确;

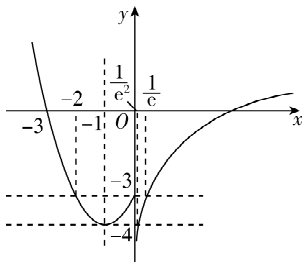
$x_1 x_3 + x_2 x_3 = (x_1 + x_2) x_3 = -2x_3 \in$

$\left[-\frac{2}{e}, -\frac{2}{e^2}\right)$ , 故 C 正确;

$x_1 x_2 = (-x_1)(-x_2) \leq \left(\frac{-x_1 - x_2}{2}\right)^2 = 1$ , 当且

仅当  $x_1 = x_2$  时, 等号成立, 因为  $x_1 \neq x_2$ , 所以  $x_1 x_2 < 1$ , 故 D 正确.

故选 BCD.



### 19. $\left[2, \frac{19}{8}\right)$

【解析】设函数  $f(x) = x^2 -$

$2kx + 3$ , 依题意, 函数有两个零点, 且在区间  $(1, 4)$  内有一个零点,

根据零点存在定理, 可知  $f(1) \cdot f(4) < 0$ ,



即  $(1-2k+3)(16-8k+3) < 0$ ,

化简得  $(4-2k)(19-8k) < 0$ , 解得  $2 <$

$$k < \frac{19}{8};$$

当  $f(1) = 0$  时,  $4-2k = 0$ , 解得  $k = 2$ , 此时方程  $x^2 - 4x + 3 = 0$  有两根, 为 1 和 3, 符合条件;

当  $f(4) = 0$  时,  $19-8k = 0$ , 解得  $k = \frac{19}{8}$ , 此时方程  $4x^2 - 19x + 12 = 0$  有两根, 为 4 和  $\frac{3}{4}$ , 不合题意.

综上所述, 实数  $k$  的取值范围为  $\left[2, \frac{19}{8}\right)$ .

20.

**思路导引**

(1) 令  $f(x) = 0$ , 解方程可求得零点;

(2) 采用分离参数的方法可得  $a = 2 \times$

$$\left(\frac{1}{3^x}\right)^2 - \frac{1}{3^x}, \text{ 设 } \frac{1}{3^x} = t, \text{ 将问题转化为}$$

直线  $y = a$  与  $g(t) = 2t^2 - t (t > 0)$  的图象有两个交点, 采用数形结合的方法即可求得结果.

**【解】**(1) 当  $a = 1$  时,  $f(x) = 9^x + 3^x - 2 = (3^x)^2 + 3^x - 2 = (3^x + 2)(3^x - 1)$ .

令  $f(x) = 0$ , 则  $3^x - 1 = 0$ , 解得  $x = 0$ ,

$\therefore f(x)$  有唯一零点  $x = 0$ .

(2) 令  $f(x) = 0$ , 则  $a = \frac{2-3^x}{9^x} = 2 \times$

$$\left(\frac{1}{3^x}\right)^2 - \frac{1}{3^x}.$$

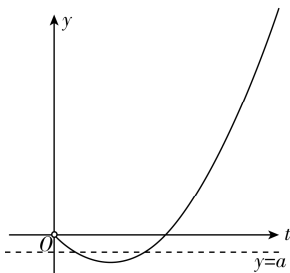
令  $\frac{1}{3^x} = t, \because 3^x > 0, \therefore t > 0$ , 令  $g(t) = 2t^2 - t (t > 0)$ .

$\because$  函数  $f(x)$  恰好有两个零点,  $\therefore$  直线  $y = a$  与  $g(t)$  的图象有两个交点.

$\because y = 2t^2 - t$  的图象开口向上, 且对称轴为直线  $t = -\frac{-1}{4} = \frac{1}{4}, \therefore g(t)_{\min} = 2 \times \frac{1}{16} -$

$$\frac{1}{4} = -\frac{1}{8}.$$

当  $t = 0$  时,  $g(0) = 0$ , 作出  $g(t)$  的大致图象如图所示,





由图易知当  $-\frac{1}{8} < a < 0$  时, 直线  $y=a$  与  $g(t)$  的图象有两个交点, 即函数  $f(x)$  恰好有两个零点,  $\therefore$  实数  $a$  的取值范围为  $\left(-\frac{1}{8}, 0\right)$ .

**易错警示** 不能正确将函数零点等价转化而致错

求解与指数函数有关的方程的根的问题时, 常利用换元法转化为熟悉的方程(如一次方程、二次方程等)的根, 使用换元法时要注意换元后的等价性, 如本题中通过换元后转化的函数要在区间  $(0, +\infty)$  上有两个零点.



### 对点上分

**1. C** 【解析】当  $x \leq 0$  时, 令  $x^3 + 8 = 0$ , 解得

$$x = -2, \text{ 当 } x > 0 \text{ 时, } f(2) = \log_4 2 + 2 - 3 = -\frac{1}{2} <$$

$0, f(3) = \log_4 3 + 3 - 3 = \log_4 3 > 0$ , 因为  $f(x)$  在  $(2, 3)$  连续, 所以  $f(x)$  在  $(2, 3)$  上存在零点, 又因为  $f(x) = \log_4 x + x - 3$  单调递增, 所以函数  $y = f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上有唯一零点.

综上,  $f(x)$  的零点个数为 2. 故选 C.

**2. B** 【解析】易得  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,

且  $f(-x) = -3(-x)^2 + 6|-x| + 3^{-|-x|} = -3x^2 + 6|x| + 3^{-|x|} = f(x)$ , 所以  $f(x)$  为偶函数.

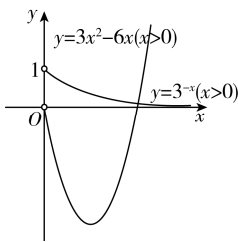
当  $x > 0$  时,  $f(x) = -3x^2 + 6x + 3^{-x}$ . 令  $f(x) = 0$ , 可得  $3x^2 - 6x = 3^{-x}$ .

画出函数  $y = 3x^2 - 6x$  与  $y = 3^{-x}$  在  $(0, +\infty)$  上的大致图象, 如图所示,

易得  $y = 3x^2 - 6x$  与  $y = 3^{-x}$  在  $(0, +\infty)$  上的图象的交点个数为 1,

所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上的零点个数为 1.

又因为  $f(x)$  为偶函数,  $f(0) = 1 \neq 0$ , 所以  $f(x)$  的零点个数为 2.

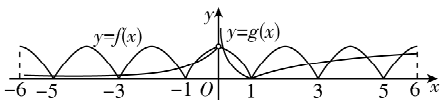


**3. C** 【解析】当  $x \in [-1, 1]$  时,  $f(x) = 1 - x^2$ ,

且  $f(x+2) = f(x)$ , 则  $y = f(x)$ ,  $g(x) =$

$\begin{cases} |\lg x|, & x > 0, \\ e^x, & x < 0 \end{cases}$  的部分图象如图所示.





当  $x < 0$  时,  $g(x) \in (0, 1)$  且单调递增;

当  $0 < x < 1$  时,  $g(x) \in (0, +\infty)$  且单调递减;

当  $x > 1$  时,  $g(x) \in (0, +\infty)$  且单调递增.

又  $f(-6) = 1 > g(-6)$ ,  $f(1) = g(1) = 0$ ,  $f(6) = 1 > g(6)$ , 由图知函数  $f(x)$  与  $g(x)$  的图象在区间  $[-6, 6]$  上共有 12 个交点, 即  $h(x) = f(x) - g(x)$  在区间  $[-6, 6]$  内的零点个数为 12. 故选 C.

#### 4. C



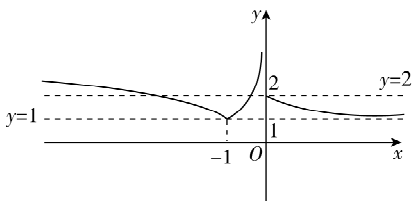
#### 思路导引

先利用零点和方程的根的关系得到  $f(x) = 2$  或  $f(x) = 1$ , 然后再利用函数的零点和函数图象交点的关系求零点的个数即可.

**【解析】** 函数  $y = [f(x)]^2 - 3f(x) + 2 = [f(x) - 1][f(x) - 2]$  的零点, 即方程  $f(x) = 1$  和  $f(x) = 2$  的根, 即函数  $f(x)$  的图象与直线  $y = 1$  和  $y = 2$  的交点的横坐标.

函数  $f(x) = \begin{cases} |\lg(-x)| + 1, & x < 0, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$  的图象如

图所示.



由图可得函数  $f(x)$  的图象与直线  $y = 1$  和  $y = 2$  共有 4 个交点, 则方程  $f(x) = 1$  和  $f(x) = 2$  共有 4 个根, 即函数  $y = [f(x)]^2 - 3f(x) + 2$  有 4 个零点. 故选 C.

**5. C** **【解析】**  $\because$  函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上连续,

且  $f(2) = \ln 2 + 6 - 8 = \ln 2 - 2 < 0$ ,

$f(3) = \ln 3 + 9 - 8 = \ln 3 + 1 > 0$ ,

又函数  $f(x) = \ln x + 3x - 8$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

$\therefore x_0 \in [2, 3]$ , 即  $a = 2, b = 3, \therefore a + b = 5$ . 故选 C.

**6. C** **【解析】** 令  $f(x) = x^2 + (a - 6)x + 2a - 4$ ,

因为二次方程  $x^2 + (a - 6)x + 2a - 4 = 0$  在  $(0, 3)$  上有两个不相等的实根,



$$\text{所以} \begin{cases} 0 < -\frac{a-6}{2} < 3, \\ f(0) > 0, \\ f(3) > 0, \\ f\left(-\frac{a-6}{2}\right) < 0, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} 0 < -\frac{a-6}{2} < 3, \\ 2a-4 > 0, \\ 5a-13 > 0, \\ -\frac{(a-6)^2}{4} + 2a-4 < 0, \end{cases} \quad \text{解得 } \frac{13}{5} < a < 10-4\sqrt{3},$$

$4\sqrt{3}$ , 所以实数  $a$  的取值范围是  $\left(\frac{13}{5}, 10-4\sqrt{3}\right)$ . 故选 C.

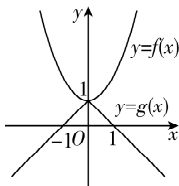
**方法总结** 利用二次函数的零点分布求参数, 一般要分析以下几个要素:

(1) 二次项系数的符号; (2) 判别式; (3) 对称轴的位置; (4) 区间端点函数值的符号. 结合图象得出关于参数的不等式组并求解.

**7. B** 【解析】由题易知函数  $f(x), g(x)$  均为偶函数, 除图象的对称轴  $x=0$  处以外两偶函数的图象的交点成对出现.

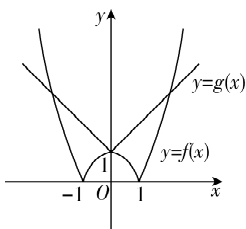
由曲线  $y=f(x)$  与  $y=g(x)$  恰有 3 个交点可知  $f(0)=g(0)$ , 即  $|a|=1$ , 解得  $a=-1$  或  $a=1$ .

当  $a=-1$  时,  $f(x)=|x^2+1|, g(x)=-|x|+1$ , 作出  $f(x)$  与  $g(x)$  的大致图象, 如图①所示, 由图①分析可知两函数图象恰有 1 个交点, 不符合题意;



图①

当  $a=1$  时,  $f(x)=|x^2-1|, g(x)=|x|+1$ , 作出  $f(x)$  与  $g(x)$  的大致图象, 如图②所示, 由图②分析可知符合题意. 故选 B.

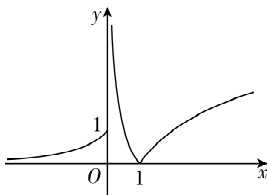


图②

**8. C** 【解析】当  $x > 0$  时,  $f(x) = |\log_2 x|$ ; 当



$x \leq 0$  时,  $f(x) = 3^x \in (0, 1]$ . 作出函数  $f(x)$  的大致图象如图所示.



令  $t = f(x)$ , 则  $t \geq 0$ ,

当  $t = 0$  时, 方程  $f(x) = t$  有 1 个实数解;

当  $t > 1$  时, 方程  $f(x) = t$  有 2 个实数解;

当  $0 < t \leq 1$  时, 方程  $f(x) = t$  有 3 个实数解.

由题知  $g(x)$  恰有 5 个零点, 设  $h(t) = t^2 - 2(m+2)t + 4m$ , 所以  $h(t) = t^2 - 2(m+2)t + 4m = 0$  有 2 个不相等的实数根  $t_1, t_2$ , 所以  $[2(m+2)]^2 - 16m = 4m^2 + 16 > 0$ .

不妨设  $t_1 < t_2$ , 要使  $g(x)$  有 5 个零点, 则需

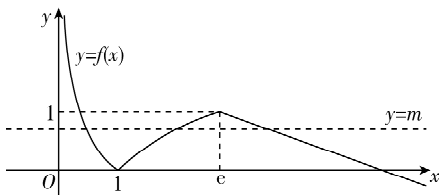
$$\text{满足} \begin{cases} 0 < t_1 \leq 1, \\ t_2 > 1. \end{cases}$$

$$\text{则} \begin{cases} h(0) = 4m > 0, \\ h(1) = 1 - 2(m+2) + 4m \leq 0, \end{cases}$$

解得  $0 < m \leq \frac{3}{2}$ , 所以实数  $m$  的取值范围是

$$\left(0, \frac{3}{2}\right]. \text{ 故选 C.}$$

**9. (0, 1)** 【解析】由题意可知,  $y = f(x)$  与  $y = m$  的图象有三个交点, 作出函数  $y = f(x)$  的大致图象如图所示.



当  $x = e$  时,  $f(e) = 1$ , 由图可知,  $0 < m < 1$ , 即实数  $m$  的取值范围是  $(0, 1)$ .



### 综合上分

**10. (1) 【解】** 假设函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  有“漂移点”

$$x_0, \text{ 则 } \frac{1}{x_0+1} = \frac{1}{x_0} + 1 \text{ 有解, 即 } x_0^2 + x_0 + 1 = 0,$$

由于方程无实根, 与题设矛盾, 所以函数

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ 没有“漂移点”}.$$

**(2) 【证明】** 令  $G(x) = g(x+1) - g(x) - g(1) = (x+1)^2 + 3^{x+1} - (x^2 + 3^x) - 4 = 2 \times 3^x + 2x - 3$ , 所以  $G(0) = -1$ ,  $G(1) = 5$ . 所以  $G(0) \cdot G(1) < 0$ ,

又  $G(x)$  的图象在  $(0, 1)$  上连续, 所以



$G(x)=0$  在  $(0,1)$  上至少有一个实根  $x_0$ , 即函数  $g(x)=3^x+x^2$  在  $(0,1)$  上存在“漂移点”.

(3)【解】若  $h(x)=\lg \frac{a}{x^2}$  在  $(0,+\infty)$  上存

在“漂移点”  $x_0$ , 则  $\lg \frac{a}{(x_0+1)^2} = \lg \frac{a}{x_0^2} +$

$\lg a$  成立, 又  $y=\lg x$  在  $(0,+\infty)$  上单调递

增, 则  $\frac{a}{(x_0+1)^2} = \frac{a}{x_0^2} \cdot a, a>0$ , 整理得  $a =$

$$\frac{x_0^2}{(x_0+1)^2} = \left( \frac{x_0}{x_0+1} \right)^2.$$

由  $x_0>0, 0<\frac{x_0}{x_0+1}<1$ , 得  $0<a<1$ , 即实数

$a$  的取值范围是  $(0,1)$ .

## 4.5.2 用二分法求方程的近似解



### 基础上分

1. C 【解析】由二分法的定义知, 若函数  $f(x)$  的图象在区间  $[a,b]$  上连续, 且满足  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , 则可以利用二分法求函数  $f(x)$  的零点的近似值. 函数的图象与  $x$  轴有 4 个交点, 左右函数值异号的交点有 3 个, 所以可以用二分法求近似值的零点个数为 3. 故选 C.

2. B 【解析】对于 A, 函数  $f(x) = \ln x + 2$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 有唯一零点  $x = e^{-2}$ , 所以函数值在零点两侧异号, 故可用二分法求零点的近似值.

对于 B, 函数  $f(x) = x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 = (x + \sqrt{2})^2 \geq 0$ , 故函数  $f(x)$  有唯一零点  $x = -\sqrt{2}$ , 且函数值在零点两侧同号, 故不能用二分法求零点的近似值.

对于 C,  $f(2) = -2 + 1 = -1 < 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} > 0$ , 故可用二分法求零点  $x = 1$  的近似值;

同理,  $f(-2) = -1 < 0, f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0$ , 故可以用二分法求零点  $x = -1$  的近似值.

对于 D, 函数  $f(x) = 2^x - 3$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 有唯一零点  $x = \log_2 3$ , 所以函数值在零点两侧异号, 故可用二分法求零点的近似值. 故选 B.

3. C 【解析】依题意, 设函数  $y=f(x)$  在  $(1, 2)$  内的零点为  $x_0$ .

因为  $f(1) = e - 2 - 2 = e - 4 < 0, f(2) = e^2 - 4 - 2 = e^2 - 6 > 0$ , 所以  $f(1)f(2) < 0$ , 所以  $x_0 \in (1, 2)$ ;

取区间  $(1, 2)$  的中点  $x_1 = 1.5$ , 则  $f(1.5) =$



$e^{1.5} - 5 = \sqrt{e^3} - \sqrt{25} < 0$ , 所以  $f(1.5)f(2) < 0$ , 所以  $x_0 \in (1.5, 2)$ ;

取区间  $(1.5, 2)$  的中点  $x_2 = 1.75$ , 则  $f(1.75) = e^{1.75} - 5.5 = \sqrt[4]{e^7} - \sqrt[4]{5.5^4} > 0$ , 所以  $f(1.5)f(1.75) < 0$ , 所以  $x_0 \in (1.5, 1.75)$ .

即两次二分法后, 函数  $y=f(x)$  零点所在的区间为  $(1.5, 1.75)$ .

故选 C.

4. AD 【解析】 $\because f(1.25)f(1.5) < 0, \therefore$  由函数零点存在定理知, 方程  $x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$  在区间  $(1.25, 1.5)$  上有实根, 而  $1.5 - 1.375 = 0.125 > 0.1$ , 没有达到精确度的要求, 应该接着计算  $f(1.4375)$ . 故选 AD.

5. C 【解析】由题中表格数据可知,  $h(0.4375) < 0, h(0.75) > 0$ , 因为函数  $h(x)$  在  $(0.4375, 0.75)$  上连续, 且函数  $h(x)$  在  $(-1, +\infty)$  上单调递增, 所以函数  $h(x)$  在区间  $(0.4375, 0.75)$  上存在一个零点, 又因为  $0.75 - 0.4375 = 0.3125 < 0.5$ , 即方程  $h(x) = 0$  的近似解(精确度为 0.5)可以是区间  $(0.4375, 0.75)$  内的任意一个数, 故选 C.

6. B 【解析】开区间  $(0, 1)$  的长度为 1, 每经过一次操作, 区间长度变为原来的一半, 经过  $n$  次操作后, 区间长度为  $\frac{1}{2^n}$ , 当二分法求  $f(x) = 0$  在区间  $(0, 1)$  上近似解, 要求精确度为 0.1 时,  $\frac{1}{2^n} \leq 0.1$ , 解得  $n \geq 4$ , 所以所需二分区间次数最少为 4 次, 故选 B.

7. 【解】(1)  $y=f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 证明如下:

任取  $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ , 不妨设  $x_1 < x_2$ ,

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2 - x_1 + \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{(x_2 - x_1)(x_1 x_2 - 1)}{x_1 x_2},$$

因为  $1 < x_1 < x_2$ , 所以  $x_2 - x_1 > 0, x_1 x_2 - 1 > 0, x_1 x_2 > 0$ , 可得  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ , 即  $f(x_2) > f(x_1)$ , 所以函数  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增.

(2) 易知函数  $f(x) = x + \frac{1}{x} - 3$  在区间  $(1, +\infty)$  上是连续且单调的, 且其在区间  $(1, +\infty)$  上的零点即为方程  $f(x) = 0$  在区间  $(1, +\infty)$  上的解, 且  $f(2) < 0, f(3) > 0$ , 可得  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  内有且仅有一个零点  $x_0 \in (2, 3)$ , 在区间  $(1, +\infty)$  上利用二分法求其近似解如表所示:



区间	中点 $x_0$	中点函数值 $f(x_0)$	区间长度
$(2, 3)$	2.5	$f(2.5) < 0$	1
$(2.5, 3)$	2.75	$f(2.75) > 0$	0.5
$(2.5, 2.75)$	2.625	$f(2.625) > 0$	0.25
$(2.5, 2.625)$	2.562 5	$f(2.562 5) < 0$	0.125

此时解在区间  $(2.562 5, 2.625)$ , 此区间长度为  $0.062 5$ ,  $0.062 5 < 0.1$ , 满足精确度为  $0.1$ , 故区间  $(2.562 5, 2.625)$  内任意一个实数都是对应方程符合精确度要求的一个近似解, 比如  $2.6$  是方程  $f(x) = 0$  在  $(1, +\infty)$  上的一个近似解 (精确度为  $0.1$ ) (答案不唯一).

### 4.5.3 函数模型的应用



#### 基础上分

1. C 【解析】由题意可得

$$\begin{cases} V(0) = k = 5, \\ V(10) = k \cdot a^{10m} = 2, \end{cases} \text{解得 } a^{10m} = \frac{2}{5},$$

$$\text{则 } V(20) = 5 \cdot a^{20m} = 5 \cdot (a^{10m})^2 = 5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{5} = 0.8,$$

即再经过  $10 \text{ s}$  后容器甲中水的体积为  $0.8 \text{ cm}^3$ .

2. A 【解析】由题意可得

$$\begin{cases} 50 - 20 = (80 - 20)e^{-\frac{10}{h}} \text{ ①,} \\ 60 - 20 = (80 - 20)e^{-\frac{t}{h}} \text{ ②,} \end{cases} \text{由 ① 式化简可}$$

$$\text{得 } h = \frac{10}{\ln 2}, \text{ 代入 ② 式得 } t =$$

$$\frac{10 \times (\ln 3 - \ln 2)}{\ln 2} \approx 5.7, \text{ 所以要使茶水能达到}$$

到最佳饮用口感大约需要放置  $5.7 \text{ min}$ .

故选 A.

3. A 【解析】设至少需要等待的时间为  $t$  小时, 想要在不违法的情况下驾驶汽车, 则每  $100 \text{ mL}$  血液中酒精含量应小于  $20 \text{ mg}$ , 即  $t$  小时后,  $240(1 - 20\%)^t < 20$ , 则  $0.8^t < \frac{1}{12}$ , 两边取常用对数得  $t \lg 0.8 < -\lg 12$ ,

$$\text{即 } t > \frac{-\lg 12}{\lg 0.8} = \frac{\lg 12}{1 - \lg 8} = \frac{\lg 3 + 2\lg 2}{1 - 3\lg 2} \approx$$

$$\frac{0.48 + 0.6}{1 - 0.9} = 10.8,$$

所以至少需要等待  $11$  小时. 故选 A.



4.1.7 【解析】由题意可得 
$$\begin{cases} 1 - e^{-\frac{A}{q_v}\omega_1} = 0.5, \\ 1 - e^{-\frac{A}{q_v}\omega_2} = 0.7, \end{cases}$$

整理可得 
$$\begin{cases} -\frac{A}{q_v}\omega_1 = \ln 0.5, \\ -\frac{A}{q_v}\omega_2 = \ln 0.3, \end{cases} \quad \text{两式相比可}$$

→ **关键**: 不求出具体值, 只求出比值即可

得 
$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\ln 0.3}{\ln 0.5} = \frac{\lg 3 - 1}{-\lg 2} \approx \frac{0.4771 - 1}{-0.3010} \approx 1.7.$$

5. A 【解析】依题意, 得 
$$\begin{cases} 5 + \lg V_1 = 4.3, \\ 5 + \lg V_2 = a, \end{cases} \quad \text{则 } \lg$$

$$V_2 - \lg V_1 = a - 4.3, \text{ 即 } \lg \frac{V_2}{V_1} = a - 4.3.$$

由  $2 < \frac{V_2}{V_1} < 3$ , 得  $\lg 2 < \lg \frac{V_2}{V_1} < \lg 3$ , 因此

$0.301 < a - 4.3 < 0.477$ , 解得  $4.601 < a < 4.777$ , 所以  $a$  的值可以是 4.7. 故选 A.

6. B 【解析】设 1 号星到地球的距离为  $d_1$ , 2 号星到地球的距离为  $d_2$ , 所以  $M_1 = m_1 + 5 -$

$5 \lg \frac{d_1}{3.26}, M_2 = m_2 + 5 - 5 \lg \frac{d_2}{3.26}$ , 两式相减

可得  $M_1 - M_2 = m_1 - m_2 - 5 \lg \frac{d_1}{d_2}$ , 则  $\lg \frac{d_1}{d_2} =$

$\frac{m_1 - m_2 - (M_1 - M_2)}{5} = \frac{m_1 - M_1 - (m_2 - M_2)}{5}$ , 所

以  $\frac{d_1}{d_2} = 10^{\frac{m_1 - M_1 - (m_2 - M_2)}{5}}$ . 故选 B.

7. D 【解析】由题意知, 当  $0 \leq x \leq 8$  时,  $y = 0.15x$ ;

当  $x > 8$  时,  $y = 8 \times 0.15 + \log_5 [2(x - 8) + 1] = 1.2 + \log_5 (2x - 15).$

所以 
$$y = \begin{cases} 0.15x, & 0 \leq x \leq 8, \\ 1.2 + \log_5 (2x - 15), & x > 8. \end{cases}$$

当  $0 \leq x \leq 8$  时,  $y_{\max} = 0.15 \times 8 = 1.2 < 3.2$ , 故小江的销售利润  $x > 8$ , 所以  $1.2 + \log_5 (2x - 15) = 3.2$ , 解得  $x = 20$ , 所以小江的销售利润是 20 万元. 故选 D.

8. A



**思路导引** 解析试需满足四个条件: (1) 自变量的取值范围是  $[0, 100]$ ; (2) 函数值域为  $[0, 100]$  的子集; (3) 该函数在  $[0, 100]$  上恒有  $y \geq x$ ; (4) 该函数在  $[0, 100]$  上单调递增. 逐一分析即可.

【解析】函数  $y = -\frac{1}{20}x^2 + 6x$  图象的对称轴

为直线  $x = -\frac{6}{2 \times \left(-\frac{1}{20}\right)} = 60$ ,



所以  $y_{\max} = -\frac{1}{20} \times 60^2 + 6 \times 60 = 180$ , 超出了范围, 不符合题意.

$y = \frac{1}{2}x + 50$ , 当  $x \in [0, 100]$  时,  $y \in [50, 100]$ ,

且  $y = \frac{1}{2}x + 50$  在  $[0, 100]$  上单调递增,

$y - x = -\frac{1}{2}x + 50 \in [0, 50]$ , 即  $y \geq x$ , 符合题意.

函数  $y = |x - 1|$  在  $[0, 1]$  上单调递减, 在  $[1, 100]$  上单调递增, 故不符合题意.

函数  $y = 10\sqrt{x}$  为增函数, 且  $x \in [0, 100]$  时,  $y \in [0, 100]$ ,

$0 \leq \sqrt{x} \leq 10$ , 则  $x \leq 10\sqrt{x}$ , 即  $y \geq x$ , 符合题意.

故满足此次联合调度要求的函数解析式的序号是②④.

故选 A.

9. 【解】(1) 对于模型③  $y = k \cdot \log_2 \left( \frac{x}{10} + 2 \right) + n$  ( $k > 0$ ), 对数型的函数增长速度较慢, 符合题意, 故选择模型③.

(2) 由题意可知所求函数图象过点  $(0, 0)$ ,

$$(20, 3), \therefore \begin{cases} k \log_2 2 + n = 0, \\ k \log_2 \left( \frac{20}{10} + 2 \right) + n = 3, \end{cases}$$

解得  $k = 3, n = -3$ ,  $\therefore$  所求函数的解析式为

$$y = 3 \log_2 \left( \frac{x}{10} + 2 \right) - 3.$$

经检验, 当  $x = 60$  时,  $y = 3 \log_2 \left( \frac{60}{10} + 2 \right) - 3 = 6$ , 符合题意.

综上所述, 函数的解析式为  $y = 3 \log_2 \left( \frac{x}{10} + 2 \right) - 3$ .

(3)  $\because$  每天得分不少于 4.5 分,

$$\therefore 3 \log_2 \left( \frac{x}{10} + 2 \right) - 3 \geq 4.5, \text{ 即}$$

$$\log_2 \left( \frac{x}{10} + 2 \right) \geq \frac{5}{2}, \therefore \frac{x}{10} + 2 \geq 2^{\frac{5}{2}} = 4\sqrt{2}, \text{ 即}$$

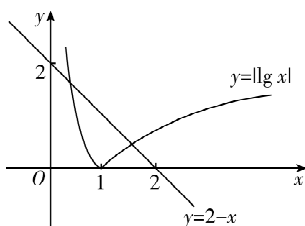
$$x \geq 40\sqrt{2} - 20 \approx 40 \times 1.414 - 20 = 36.56 \approx 37,$$

$\therefore$  至少需要锻炼 37 分钟.

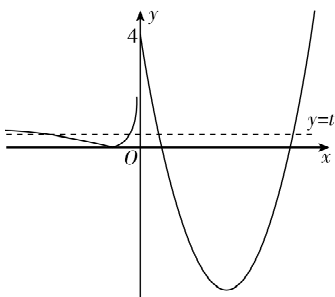
## 4.5 节测上分

1. C 【解析】由  $|\lg x| + x - 2 = 0$  得  $|\lg x| = 2 - x$ , 在同一平面直角坐标系内作出  $y = |\lg x|$  与  $y = 2 - x$  的大致图象(如图), 由图可知两个函数的图象有 2 个交点, 所以方程有 2 个解, 故选 C.





2. C 【解析】 $f(x)$  的大致图象如图所示.



函数  $y=[f(x)]^2-bf(x)+1$  有 8 个不同的零点, 等价于方程  $[f(x)]^2-bf(x)+1=0$  有 8 个不同的实根, 令  $t=f(x)$ , 则  $t^2-bt+1=0$  有两个不同的实根  $t_1, t_2$ , 且  $t_1, t_2 \in (0, 4]$ , 当  $f(x)=t=0$  时,  $t^2-bt+1=1>0$ , 所以

$$\begin{cases} 0 < \frac{b}{2} < 4, \\ \Delta = b^2 - 4 > 0, \\ 17 - 4b \geq 0, \end{cases} \text{ 解得 } 2 < b \leq \frac{17}{4}. \text{ 故选 C.}$$

3. BC 【解析】对于 A, 当  $t=24.86$  时,  $N=N_0 \cdot 2^{-\frac{24.86}{12.43}}=N_0 \cdot 2^{-2}=\frac{1}{4}N_0$ , 故 A 错误;

对于 B, 当  $t=12.43$  时,  $N=N_0 \cdot 2^{-\frac{12.43}{12.43}}=\frac{1}{2}N_0$ , 所以此时样本中氙的质量衰变了一半, 故 B 正确;

对于 C, 当  $t=62.15$  时,  $N=N_0 \cdot 2^{-\frac{62.15}{12.43}}=N_0 \cdot 2^{-5}=\frac{1}{32}N_0$ , 即经过 62.15 年后, 样本中的氙的质量变为原来的  $\frac{1}{32}$ , 故 C 正确;

对于 D, 由题意  $0.4N_0=N_0 \cdot 2^{-\frac{x}{12.43}}$ , 化简得  $x = -12.43 \log_2 \frac{0.4N_0}{N_0} = -12.43 \log_2 \frac{2}{5} = -12.43 (\log_2 2 - \log_2 5) = -12.43 \left(1 - \frac{\lg 5}{\lg 2}\right) = -12.43 \left(1 - \frac{1 - \lg 2}{\lg 2}\right)$ , 将  $\lg 2 \approx 0.301$  代入, 可得  $x \approx -12.43 \left(1 - \frac{1 - 0.301}{0.301}\right) \approx 16.44 < 17$ , 故 D 错误.

故选 BC.

4. A 【解析】设  $t=f(x)$ , 则关于  $x$  的方程  $6[f(x)]^2-f(x)-1=0$ , 等价于关于  $t$  的方程  $6t^2-t-1=0$ ,



解得  $t = \frac{1}{2}$  或  $t = -\frac{1}{3}$ ,

当  $x = 0$  时,  $f(0) = 0$ , 此时不满足方程.

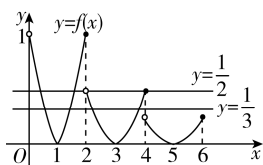
若  $2 < x \leq 4$ , 则  $0 < x-2 \leq 2$ ,

$$\text{即 } f(x) = \frac{1}{2}f(x-2) = \frac{1}{2}(2^{|x-3|} - 1),$$

若  $4 < x \leq 6$ , 则  $2 < x-2 \leq 4$ ,

$$\text{即 } f(x) = \frac{1}{2}f(x-2) = \frac{1}{4}(2^{|x-5|} - 1),$$

作出当  $x > 0$  时,  $f(x) = \begin{cases} 2^{|x-1|} - 1, & 0 < x \leq 2, \\ \frac{1}{2}f(x-2), & x > 2 \end{cases}$  的部分图象如图所示.



当  $t = \frac{1}{2}$  时,  $f(x)$  的图象与直线  $y = \frac{1}{2}$  有 3 个交点, 即  $x_1 + x_2 + x_3 = 2 \times 1 + 4 = 6$ .

$\therefore$  函数  $f(x)$  是奇函数,

$\therefore$  当  $x < 0$  时, 由  $f(x) = -\frac{1}{3}$ ,

可得当  $x > 0$  时,  $f(x) = \frac{1}{3}$ , 此时  $f(x)$  的图

象与直线  $y = \frac{1}{3}$  有 4 个交点,

即  $x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 2 \times (-1) + 2 \times (-3) = -8$ ,

**提示:** 利用奇函数的性质直接求出方程负实数根的和

故原方程的所有实数根的和为 -2.

故选 A.

**5. ABC** 【解析】对于 A, 由题可画出  $f(x)$  的大致图象, 则方程  $f(x) = k (k \in \mathbf{R})$  有四个不同的根等价于  $f(x)$  的图象与直线  $y = k$  有 4 个交点, 则由图可得  $0 < k \leq \frac{1}{4}$ , 故 A 正确.

对于 B, 由图可得, 当  $k = \frac{1}{4}$  时,  $x_3 = e^{\frac{3}{4}}$ , 当  $k$  趋近于 0 时,  $x_3 < e$  且趋近于  $e$ , 则  $e^{\frac{3}{4}} \leq x_3 < e$ , 故 B 正确.

对于 C, 由题可得,  $|\ln x_3 - 1| = |\ln x_4 - 1|$ ,

由图可知  $x_4 > e$ , 又  $e^{\frac{3}{4}} \leq x_3 < e$  所以  $1 - \ln x_3 = \ln x_4 - 1$ , 解得  $\ln x_3 + \ln x_4 = \ln(x_3 x_4) =$

$2$ ,  $x_3 x_4 = e^2$ . 又由题及图可得,  $-\frac{1}{2} < x_2 \leq 0$ ,

$x_1 + x_2 = -1$ , 则  $x_1 x_2 x_3 x_4 = -(x_2 + 1) x_2 \cdot e^2 =$

$-e^2 \left( x_2 + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{e^2}{4}$ , 注意到函数  $y =$

$-e^2 \left( x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{e^2}{4}$  在  $\left( -\frac{1}{2}, 0 \right]$  上单调递

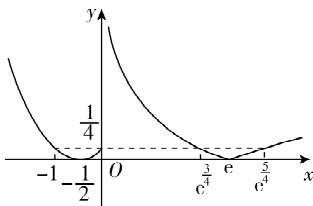


减, 则  $x_1 x_2 x_3 x_4 \in \left[0, \frac{e^2}{4}\right)$ , 故 C 正确;

对于 D, 令  $f(x) = t$ , 则由  $g(x) = 0$  可得,  
 $f(f(x)) - \frac{1}{4} = 0, f(t) = \frac{1}{4}$ , 由图可得  $t_1 = -1, t_2 = 0, t_3 = e^{\frac{3}{4}}, t_4 = e^{\frac{5}{4}}$ , 则  $g(x) = f(f(x)) - \frac{1}{4}$  的零点个数为方程  $f(x) = -1, f(x) = 0, f(x) = e^{\frac{3}{4}}, f(x) = e^{\frac{5}{4}}$  的根的个数之和, 即  $f(x)$  的图象与直线  $y = -1, y = 0, y = e^{\frac{3}{4}}, y = e^{\frac{5}{4}}$  交点个数之和.

由图可知,  $f(x)$  图象与直线  $y = -1$  交点个数为 0, 与直线  $y = 0$  交点个数为 2, 与直线  $y = e^{\frac{3}{4}}$  交点个数为 3, 与直线  $y = e^{\frac{5}{4}}$  交点个数为 3, 则交点个数之和为 8, 即函数  $g(x) = f(f(x)) - \frac{1}{4}$  有 8 个零点, 故 D 错误.

故选 ABC.



6.  $\frac{3}{4}$  【解析】设  $f(x) = 2x^3 + 3x - 3$ , 则

$$f(0) = -3 < 0, f(1) = 2 > 0, f(0) \cdot f(1) < 0,$$

$\therefore$  第一次取区间  $(0, 1)$  的中点  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4} < 0, \therefore f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) < 0, \text{ 故}$$

$f(x)$  的零点所在的区间为  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ , 第二

次取区间  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  的中点  $x_2 = \frac{3}{4}$ .

7. 【解】(1) 当  $m = 1, n = 2$  时,  $f(x) = x^2 - 2x + 2$ , 设  $x_0$  为不动点, 由题知  $x_0^2 - 2x_0 + 2 = x_0$ , 即  $x_0^2 - 3x_0 + 2 = 0$ , 解得  $x_0 = 1$  或  $x_0 = 2$ ,  $\therefore$  函数  $f(x)$  的不动点为 1 和 2.

(2)  $\because f(x)$  恒有两个相异的不动点,  $\therefore mx^2 - (m+1)x + n = x$  恒有两个不等实根, 整理得到  $mx^2 - (m+2)x + n = 0$ , 所以  $m \neq 0$  且  $\Delta = (m+2)^2 - 4mn > 0$  恒成立.

由题知对于任意  $n \in \left[-\frac{1}{4}, 0\right]$ ,

$$-4mn + m^2 + 4m + 4 > 0 \text{ 恒成立.}$$

$$\text{令 } g(n) = -4mn + m^2 + 4m + 4,$$

$$\therefore \begin{cases} g\left(-\frac{1}{4}\right) > 0, \\ g(0) > 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} m^2 + 5m + 4 > 0, \\ m^2 + 4m + 4 > 0, \end{cases} \text{ 解}$$

得  $m < -4$  或  $m > -1$ , 又  $m \neq 0$ ,



$\therefore$  实数  $m$  的取值范围为  $(-\infty, -4) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ .

(3) 当  $m=1$  时,  $f(x)=x^2-2x+n$ ,

$\because A \neq \emptyset, \therefore x^2-3x+n=0$  有实数根,  $\therefore \Delta_1 = 9-4n \geq 0$ , 解得  $n \leq \frac{9}{4}$ .

记  $y=f(x)$ , 则关于  $x$  的方程  $f(f(x))=x$

的解为方程组  $\begin{cases} y=x^2-2x+n, \\ x=y^2-2y+n \end{cases}$  的解中  $x$  的

值, 两式相减可得  $(x-y)(x+y-1)=0$ ,

$\because A=B, \therefore$  要使  $f(x)=x$  与  $f(y)=x$  有相同的

解, 则  $x-y=0$  与  $(x-y)(x+y-1)=0$  的  $x$

的解集相同,  $\therefore$  方程  $x+y-1=0$  无解或其

解与  $x-y=0$  相同, 即  $x^2-x+n-1=0$  无解或

其解为  $x=\frac{1}{2}, \therefore \Delta' = (-1)^2 - 4(n-1) \leq 0$ ,

解得  $n \geq \frac{5}{4}$ .

综上,  $\frac{5}{4} \leq n \leq \frac{9}{4}, \therefore$  实数  $n$  的取值范围

是  $\left[\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right]$ .

## 专题上分 4 指数函数、

### 对数函数图象的应用

1. A 【解析】对于 A, B, 由图象结合指数函数性质得  $a > 1$ ,

且对于  $y=ax-a$ , 当  $x=0$  时,  $y=-a$ ,

则  $-a < -1$ , 故 A 正确, B 错误.

对于 C, 由指数函数性质结合图象得  $0 < a < 1$ , 则  $-1 < -a < 0$ , 与图象不符, 故 C 错误.

对于 D, 由指数函数性质结合图象得  $0 < a < 1$ , 对于  $y=a^x+a$ , 当  $x=0$  时,  $y=a^0+a=1+a$ ,

则  $1 < a+1 < 2$ , 与图象不符, 故 D 错误.

故选 A.

**关键点拨** 根据指数函数的图象趋势容易判断  $a$  的范围, 再验证此范围下一次函数图象是否符合即可判断选项 A, B, C.

2. C 【解析】设  $g(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ , 因为

对任意  $x \in \mathbf{R}, \sqrt{x^2+1} > |x| \geq x$ ,

所以  $\sqrt{x^2+1}-x > 0$ , 所以  $g(x)$  的定义域为

$\mathbf{R}$ , 又  $g(-x) = \ln(\sqrt{x^2+1}+x) =$

$$\ln \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x} =$$

$$\ln \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = -\ln(\sqrt{x^2+1}-x) = -g(x),$$

所以函数  $g(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x)$  为奇函数,

令  $g(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x) = 0$ ,



可得  $\sqrt{x^2+1}-x=1$ , 即  $\sqrt{x^2+1}=x+1$ , 所以  $x+1 \geq 0$ , 可得  $x \geq -1$ .

由  $\sqrt{x^2+1}=x+1$  可得  $x^2+1=(x+1)^2$ , 解得

$x=0$ , 所以  $f(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{\ln(\sqrt{x^2+1}-x)}$  的定义域

为  $\{x \mid x \neq 0\}$ , 又  $f(-x)=\frac{2^{-x}+2^x}{g(-x)}=$

$-\frac{2^{-x}+2^x}{g(x)}=-f(x)$ , 所以函数  $f(x)$  为奇函

数, 排除 B, D;

当  $x>0$  时,  $\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=\ln \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$  单

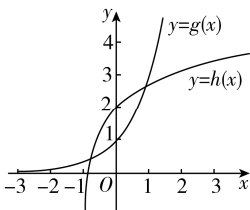
调递减, 则  $\ln(\sqrt{x^2+1}-x)<\ln(\sqrt{0+1}-$

$0)=\ln 1=0, 2^x+2^{-x}>0$ , 所以  $f(x)<0$ , 排除

A. 故选 C.

3. C 【解析】令  $f(x)=0$ , 则  $3^x-\ln(x+1)-2=0 \Leftrightarrow 3^x=\ln(x+1)+2$ ,

在同一直角坐标系下分别画出函数  $g(x)=3^x, h(x)=\ln(x+1)+2$  的大致图象, 如图所示.



因为  $g(e^{-2}-1)>0=h(e^{-2}-1)$ ,

$g(0)=1<h(0)=2, g(1)=3>h(1)=2+$

$\ln 2, g(x)=3^x, h(x)=\ln(x+1)+2$  在定义

域上都是增函数,

且随着自变量  $x$  的增大, 函数  $g(x)$  的增长速度远大于  $h(x)$  的增长速度,

提示: 结合两函数在  $x=1$  处的函数值及增长速度, 可说明  $g(x)$  与  $h(x)$  图象在  $[1, +\infty)$  上一定没有交点

所以  $g(x)=3^x, h(x)=\ln(x+1)+2$  的图象有两个交点,

所以函数  $f(x)=3^x-\ln(x+1)-2$  的零点个数为 2. 故选 C.

4. D 【解析】 $g(x)=0$  等价于  $f(x)=x-1$ , 故  $g(x)$  的零点个数等于曲线  $y=f(x)$  和直线  $y=x-1$  的交点个数.

$\because f(x)=-f(x+2), \therefore f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$ , 又  $\because f(x)$  为奇函数,  $\therefore f(x)=-f(2+x)=f(-2-x)=f(2-x)$ , 故曲线  $y=f(x)$  关于直线  $x=1$  对称.

当  $0 \leq x \leq 1$  时,  $f(x)=4^x+2x-1$  单调递增, 可画出  $y=f(x)$  在  $[0, 1]$  上的大致图象,

再根据曲线  $y=f(x)$  关于直线  $x=1$  对称可画出  $y=f(x)$  在  $[1, 2]$  上的大致图象,

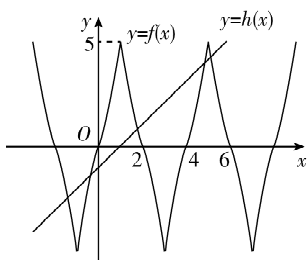
最后利用  $f(x)$  为奇函数与  $f(x+4)=f(x)$



可画出  $y=f(x)$  的图象,再在同一直角坐标系内画出  $h(x)=x-1$  的图象如图所示.

由图可知两图象共有 5 个交点,则函数  $g(x)=f(x)-x+1$  的零点个数为 5.

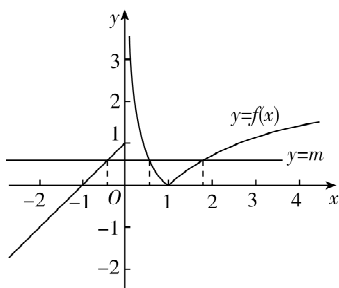
故选 D.



**5. ABC** 【解析】令  $f(x)=m$ , 则方程  $f(x)=m$  的实数根的个数等价于函数  $f(x)$  的图象与直线  $y=m$  交点的个数.

由于  $|\ln x| = \begin{cases} \ln x, & x \geq 1, \\ -\ln x, & 0 < x < 1, \end{cases}$  所以作出函数

$f(x)$  的大致图象如图所示.



当  $m < 0$  时,函数  $f(x)$  的图象与直线  $y=m$  交点有 1 个,故方程  $f(x)=m$  的实数根的个数为 1;

当  $m=0$  或  $m > 1$  时,函数  $f(x)$  的图象与直线  $y=m$  交点有 2 个,故方程  $f(x)=m$  的实数根的个数为 2;

当  $0 < m \leq 1$  时,函数  $f(x)$  的图象与直线  $y=m$  交点有 3 个,故方程  $f(x)=m$  的实数根的个数为 3.

方程  $f(f(x))+a=0$ ,可化为  $f(m)=-a$ ,

对于 A, B, 当  $a \in (-1, 0)$  时,  $-a \in (0, 1)$ , 方程  $f(m)=-a$  有 3 个实数根,分别记为  $m_1, m_2, m_3$ , 且  $-1 < m_1 < 0, 0 < m_2 < 1, m_3 > 1$ , 从而  $f(x)=m_1$  有 1 个实数根,  $f(x)=m_2$  有 3 个实数根,  $f(x)=m_3$  有 2 个实数根, 所以方程  $f(f(x))+a=0$  有 6 个实数根, **A, B 正确;**

对于 C, 当  $a=0$  时,  $f(m)=0$  有 2 个实数根,分别为  $-1, 1$ , 从而方程  $f(x)=-1$  有 1 个实数根,方程  $f(x)=1$  有 3 个实数根, 所以方程  $f(f(x))+a=0$  有 4 个实数根, **C 正确;**

对于 D, 当  $a=-1$  时,  $-a=1$ , 方程  $f(m)=1$  有 3 个实数根,分别为  $0, \frac{1}{e}, e$ , 方程



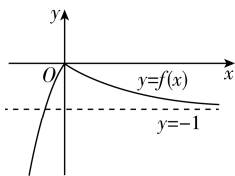
$f(x)=0$  有 2 个实数根, 方程  $f(x)=\frac{1}{e}$  有 3 个实数根, 方程  $f(x)=e$  有 2 个实数根, 则方程  $f(f(x))+a=0$  有 7 个实数根, D 错误. 故选 ABC.

6. 【解】(1) 作出  $f(x)=\begin{cases} 3x-x^2, & x \leq 0, \\ 2^{-x}-1, & x > 0 \end{cases}$  的大致

图象,

可知  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递增, 在  $(0, +\infty)$  上单调递减,

要使  $f(x)=a$  有 2 个不同的实根, 只需  $y=f(x)$  的图象与直线  $y=a$  有 2 个不同交点, 由图可知,  $-1 < a < 0$ , 故实数  $a$  的取值范围为  $(-1, 0)$ .



(2) 由  $2[f(x)]^2 + (1-4a) \cdot f(x) - 2a = 0$  可得  $[f(x)-2a][2f(x)+1] = 0$ ,

故  $f(x) = -\frac{1}{2}$  或  $f(x) = 2a$ ,

由  $f(x)$  的图象可知,  $f(x) = -\frac{1}{2}$  有 2 个不相等的实数根,

要使  $x$  的方程  $2[f(x)]^2 + (1-4a) \cdot f(x) - 2a = 0$  有 4 个不同的实根, 则方程  $f(x) = 2a$  有两个不相等的实数根且  $2a \neq -\frac{1}{2}$ ,

故  $-1 < 2a < 0$ , 解得  $-\frac{1}{2} < a < 0$ ,

所以实数  $a$  的取值范围为  $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ .

## 专题上分 5 指数函数、

## 对数函数性质的综合应用

1. D 【解析】因为指数函数  $y=0.8^x$  在定义域内为减函数,  $0.7 < 0.9$ , 所以  $a=0.8^{0.7} > b=0.8^{0.9}$ , 因为幂函数  $g(x)=x^{0.7}$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,  $0.8 < 0.9$ , 所以  $a=0.8^{0.7} < c=0.9^{0.7}$ , 所以  $c > a > b$ . 故选 D.

2. ABC 【解析】令  $2^x-2=3^y-3=5^z-5=a$ , 得  $x=\log_2(a+2)$ ,  $y=\log_3(a+3)$ ,  $z=\log_5(a+5)$ ,  $a > -2$ , 在同一直角坐标系内作出函数  $f(t)=\log_2(t+2)$ ,  $g(t)=\log_3(t+3)$ ,  $h(t)=\log_5(t+5)$

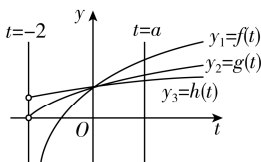


5) 的图象,

则  $x, y, z$  分别是函数  $y_1 = f(t), y_2 = g(t), y_3 = h(t), t > -2$  时的图象与直线  $t = a (a > -2)$  交点的纵坐标.

观察图象得, 当  $a = 0$  时,  $x = y = z$ ; 当  $a > 0$  时,  $x > y > z$ ; 当  $-2 < a < 0$  时,  $z > y > x$ , 因此 A, B, C 都可能, D 不可能.

故选 ABC.



3. D 【解析】因为函数  $f(x)$  是定义域为  $\mathbf{R}$  的偶函数,

所以  $f(\log_{0.5} 5) = f(\log_{2^{-1}} 5) = f(-\log_2 5) = f(\log_2 5), f(-2) = f(2)$ ,

因为函数  $y = \log_2 x$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 所以  $\log_2 5 > \log_2 4 = 2$ ,

因为函数  $y = \log_5 x$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 所以  $0 < \log_5 6 < \log_5 25 = 2$ ,

所以  $0 < \log_5 6 < 2 < \log_2 5$ ,

因为函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 所以  $f(\log_5 6) < f(2) < f(\log_2 5)$ ,

故  $f(\log_{0.5} 5) > f(-2) > f(\log_5 6)$ .

故选 D.

4. BCD 【解析】根据题意,  $a = \log_{\sqrt{2}} 3 =$

$$\frac{\log_2 3}{\log_2 \sqrt{2}} = 2\log_2 3, b = \log_{\sqrt{3}} 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 \sqrt{3}} =$$

$$\frac{2}{\frac{1}{2}\log_2 3} = \frac{4}{\log_2 3}.$$

对于 A,  $a^2 + b^2 = (2\log_2 3)^2 + \left(\frac{4}{\log_2 3}\right)^2 \geq 2 \times$

$$2\log_2 3 \times \frac{4}{\log_2 3} = 16,$$

因为  $a \neq b$ , 所以等号不成立, 即  $a^2 + b^2 > 16$ , A 错误;

$$\text{对于 B, } \frac{2}{a} + \frac{b}{2} = \frac{1}{\log_2 3} + \frac{2}{\log_2 3} = \frac{3}{\log_2 3} =$$

$$3\log_3 2 = \log_3 8 < \log_3 9 = 2, \text{ B 正确;}$$

$$\text{对于 C, } ab = 2\log_2 3 \times \frac{4}{\log_2 3} = 8, a = 2\log_2 3 =$$

$$\log_2 9 > \log_2 8 = 3, b = \frac{4}{\log_2 3} = 4\log_3 2 = \log_3 16 <$$

$$\log_3 27 = 3, \text{ 则 } a - b > 0,$$

$$\text{由 } a + \frac{9}{a} - \left(b + \frac{9}{b}\right) = \frac{a^2 b + 9b - ab^2 - 9a}{ab} =$$

$$\frac{ab(a-b) - 9(a-b)}{ab} = \frac{(a-b)(ab-9)}{ab} =$$

$$\frac{-(a-b)}{8} < 0, \text{ 得 } \frac{9}{a} + a < \frac{9}{b} + b, \text{ C 正确;}$$

对于 D, 由于  $a = \log_2 9 < \log_2 16 = 4, b =$





$\log_3 16 > \log_3 9 = 2$ , 所以  $3 < a < 4, 2 < b < 3$ ,

则  $\frac{1}{2} < \frac{a-2}{2} < 1, 0 < \frac{b-2}{2} < \frac{1}{2}$ , 且  $a-2 > b-2$ ,

由于  $y = \left(\frac{b-2}{2}\right)^x$  为减函数, 所以

$$\left(\frac{b-2}{2}\right)^{a-2} < \left(\frac{b-2}{2}\right)^{b-2},$$

由于  $y = x^{b-2}$  为增函数, 所以  $\left(\frac{b-2}{2}\right)^{b-2}$

$$< \left(\frac{a-2}{2}\right)^{b-2},$$

所以  $\left(\frac{b-2}{2}\right)^{a-2} < \left(\frac{a-2}{2}\right)^{b-2}$ , 即  $\frac{(b-2)^{a-2}}{2^{a-2}} <$

$$\frac{(a-2)^{b-2}}{2^{b-2}}, \text{ 则 } \frac{(b-2)^{a-2}}{2^a} < \frac{(a-2)^{b-2}}{2^b}, \text{ D 正确.}$$

故选 BCD.

5. (1) 【证明】由题可知  $e^x \geq x+1$  恒成立, 用  $x-1$  替换  $x$  得  $e^{x-1} \geq x$ ,

当  $x > 0$  时, 两边同时取对数得  $x-1 \geq \ln x$ ,

当且仅当  $x=1$  时取等号,

故  $g(x) = \ln x - x + 1 \leq 0$ , 当且仅当  $x=1$  时等号成立.

(2) 【证明】由(1)知  $\ln x \leq x-1$ , 当且仅当  $x=1$  时等号成立,

令  $x = \frac{k+1}{k} > 1 (k \in \mathbf{N}^*)$ , 则  $\ln \frac{k+1}{k} < \frac{k+1}{k} -$

$$1 = \frac{1}{k},$$

所以  $\ln(n+2) = \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{n+2}{n+1} <$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} (n \in \mathbf{N}^*), \text{ 得证.}$$

(3) 【解】因为  $f(x_1) + 2x_1 + 1 = 7, f(x) = e^x - x - 1$ , 所以  $e^{x_1} + x_1 = 7$ ,

又因为  $g(x_2) + 2x_2 - 1 = 7, g(x) = \ln x - x + 1$ ,

所以  $\ln x_2 + x_2 = 7$ , 即  $\ln x_2 + e^{\ln x_2} = 7$ ,

令  $h(x) = e^x + x$ , 则  $h(\ln x_2) = \ln x_2 + e^{\ln x_2} = 7$ ,

又因为  $h(x)$  为增函数, 所以  $x_1 = \ln x_2$ , 即  $e^{x_1} = x_2$ ,

代入  $e^{x_1} + x_1 = 7$  得到  $x_1 + x_2 = 7$ , 又因为  $e^{\ln 7.1} = 7.1 > 7$ , 所以  $x_1 + x_2 < e^{\ln 7.1}$ .

6. B 【解析】由题知  $\begin{cases} a > 1, \\ \frac{4a}{2} = 2a \geq 1, \text{ 解得 } 1 < \\ 1 \geq 7a - 13, \end{cases}$

$a \leq 2$ . 故选 B.

提示: 判断分段函数的单调性注意分段处也需满足函数单调性

7. AC 【解析】当  $a > 1$  时,  $f(x)$  是增函数,

所以在区间  $[a, 2a]$  上,  $f(x)_{\max} = f(2a) = 1 +$

$\log_a 2a = 2 + \log_a 2, f(x)_{\min} = f(a) = 1 +$



$$\log_a a = 2,$$

故此时  $f(x)_{\max} - f(x)_{\min} = \log_a 2 = 1$ , 解得  $a = 2$ ;

当  $0 < a < 1$  时,  $f(x)$  是减函数,

所以在区间  $[a, 2a]$  上,  $f(x)_{\max} = f(a) = 2$ ,  
 $f(x)_{\min} = f(2a) = 2 + \log_a 2$ ,

故  $f(x)_{\max} - f(x)_{\min} = -\log_a 2 = 1$ , 解得  $a = \frac{1}{2}$ .

综上,  $a = 2$  或  $\frac{1}{2}$ .

故选 AC.

**8. C** 【解析】由题可知, 若  $\exists x_1 \in [1, 2]$ ,

$\exists x_2 \in [1, 4]$ , 使得  $f(x_1) \geq g(x_2)$ ,

则  $f(x)_{\max} \geq g(x)_{\min}$ .

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x} = x + \frac{2}{x},$$

故  $f(x)$  在  $[1, \sqrt{2}]$  上单调递减, 在  $(\sqrt{2}, 2]$  上单调递增, 故  $f(x)$  在  $x = \sqrt{2}$  处取得最小值,

$$\text{又 } f(1) = \frac{1+2}{1} = 3, f(2) = \frac{2^2+2}{2} = 3, \text{ 故}$$

$$f(x)_{\max} = 3.$$

易知  $y = \log_2 x$  在区间  $[1, 4]$  上单调递增, 则  $g(x)$  在  $[1, 4]$  上取最小值时,  $y = \log_2 x$  取得最大值,

$$\text{即 } g(x)_{\min} = m - \log_2 4 = m - 2.$$

于是  $f(x)_{\max} \geq g(x)_{\min} \Rightarrow 3 \geq m - 2$ , 解得  $m \leq 5$ .

故选 C.

**9. A** 【解析】当  $x \in [-8, -4)$  时,  $f(x) \geq$

$$\frac{m-1}{4} - \frac{1}{m} \text{ 恒成立, 则 } f(x)_{\min} \geq \frac{m-1}{4} - \frac{1}{m}.$$

定义域为  $\mathbf{R}$  的函数  $f(x)$  满足  $f(x+4) = 2f(x)$ ,

当  $x \in [0, 4)$  时,  $f(x) =$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x, & x \in [0, 2), \\ -\left(\frac{1}{3}\right)^{|x-3|}, & x \in [2, 4), \end{cases}$$

当  $x \in [-8, -6)$  时,  $x+8 \in [0, 2)$ ,

$$\text{则 } f(x) = \frac{1}{2}f(x+4) = \frac{1}{4}f(x+8) = \frac{1}{4} \times$$

$$\left[ \frac{1}{2}(x+8)^2 - (x+8) \right] = \frac{1}{8}[(x+8)^2 - 2(x+8) + 1] - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}(x+7)^2 - \frac{1}{8},$$

$$\text{又 } -1 \leq x+7 < 1, \text{ 此时 } f(x) \geq f(-7) = -\frac{1}{8};$$

当  $x \in [-6, -4)$  时,  $x+8 \in [2, 4)$ ,

$$\text{则 } f(x) = \frac{1}{2}f(x+4) = \frac{1}{4}f(x+8) = \frac{1}{4} \times$$



$$\left[-\left(\frac{1}{3}\right)^{|x+8-3|}\right] = -\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{|x+5|},$$

因为  $-1 \leq x+5 < 1$ , 所以  $0 \leq |x+5| \leq 1$ , 则

$$\frac{1}{3} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{|x+5|} \leq 1, \text{ 所以 } f(x) \geq$$

$$f(-5) = -\frac{1}{4},$$

所以函数  $f(x)$  在  $[-8, -4)$  上的最小值为

$$f(-5) = -\frac{1}{4},$$

$$\text{所以 } \frac{m-1}{4} - \frac{1}{m} \leq -\frac{1}{4}, \text{ 解得 } m \leq -2 \text{ 或}$$

$$0 < m \leq 2.$$

故实数  $m$  的取值范围是  $(-\infty, -2] \cup (0, 2]$ . 故选 A.

10. 【解】(1) 由题意得  $a^x - \frac{1}{a^x} < \frac{8}{3}$ , 即  $3a^{2x} -$

$$8a^x - 3 < 0, (3a^x + 1) \cdot (a^x - 3) < 0,$$

因为  $3a^x + 1 > 0$ , 所以  $a^x - 3 < 0$ , 即  $a^x < 3$ .

当  $0 < a < 1$  时, 不等式的解集为  $\{x \mid x > \log_a 3\}$ ;

当  $a > 1$  时, 不等式的解集为  $\{x \mid x < \log_a 3\}$ .

$$(2) \text{ 由题意, } f(1) = a - \frac{1}{a} < 0, \text{ 即 } \frac{a^2 - 1}{a} < 0,$$

又  $a > 0$ , 解得  $0 < a < 1$ , 则  $y = a^x$  在  $\mathbf{R}$  上单调递减,

$y = \frac{1}{a^x}$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 所以  $f(x) = a^x -$

$\frac{1}{a^x}$  在  $\mathbf{R}$  上单调递减.

又  $f(x) = a^x - \frac{1}{a^x}$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $f(-x) =$

$$a^{-x} - \frac{1}{a^{-x}} = \frac{1}{a^x} - a^x = -f(x),$$

所以函数  $f(x) = a^x - \frac{1}{a^x}$  为奇函数.

不等式  $f(x^2 + bx) + f(1 - x) < 0$  可化为

$$f(x^2 + bx) < f(x - 1),$$

因为  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递减, 所以原不等式转化为  $x^2 + bx > x - 1$  在  $\mathbf{R}$  上恒成立,

即  $x^2 + (b - 1)x + 1 > 0$  在  $\mathbf{R}$  上恒成立,

则  $\Delta = (b - 1)^2 - 4 < 0$ , 即  $b^2 - 2b - 3 < 0$ , 解得  $-1 < b < 3$ ,

所以实数  $b$  的取值范围为  $(-1, 3)$ .

$$(3) \text{ 由题意, } f(1) = a - \frac{1}{a} = \frac{3}{2}, \text{ 解得 } a = 2$$

$$\text{或 } a = -\frac{1}{2} \text{ (舍),}$$

因为  $y = 2^x$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 所以  $f(x) =$

$2^x - \frac{1}{2^x}$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增,

当  $x \in [1, +\infty)$  时,  $f(x) \geq f(1) = \frac{3}{2}$ , 即  $f$



$$f(x) \geq \frac{3}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{函数 } h(x) &= 2^{2x} + \frac{1}{2^{2x}} - 2tf(x) = \\ &\left(2^x - \frac{1}{2^x}\right)^2 - 2tf(x) + 2 = [f(x)]^2 - 2tf(x) + \\ &2 = [f(x) - t]^2 + 2 - t^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{令 } f(x) &= m, m \geq \frac{3}{2}, \text{ 设 } g(m) = (m-t)^2 + \\ &2 - t^2, m \geq \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

$$\text{当 } t \leq \frac{3}{2} \text{ 时, 函数 } g(m) = (m-t)^2 + 2 - t^2$$

在  $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$  上单调递增,

所以当  $m = \frac{3}{2}$  时, 函数  $g(m)$  取得最小值,

$$\begin{aligned} \text{即 } g(m)_{\min} &= \left(\frac{3}{2} - t\right)^2 + 2 - t^2 = -2, \text{ 解得 } t = \\ &\frac{25}{12} \text{ (舍)}; \end{aligned}$$

$$\text{当 } t > \frac{3}{2} \text{ 时, 函数 } g(m) = (m-t)^2 + 2 - t^2 \text{ 在}$$

$\left[\frac{3}{2}, t\right]$  上单调递减, 在  $(t, +\infty)$  上单调递增,

所以当  $m = t$  时, 函数  $g(m)$  取得最小值,  $g(m)_{\min} = (t-t)^2 + 2 - t^2 = -2$ , 解得  $t = 2$  或  $t = -2$  (舍).

综上,  $t$  的值为 2.

## 专题上分 6 函数零点的综合应用

1. C 【解析】 $f(x) = \frac{x^3+x}{2}$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 且  $f$

$$f(-x) = \frac{-x^3-x}{2} = -f(x),$$

所以  $f(x) = \frac{x^3+x}{2}$  为奇函数.

令  $g(x) = f(f(x))$ , 其定义域也为  $\mathbf{R}$ ,  $g(-x) = f(f(-x)) = f(-f(x)) = -f(f(x)) = -g(x)$ ,

所以  $g(x)$  为奇函数, 且  $h(x) = x$  也是奇函数.

方程  $f(f(x)) = x$  的实数根, 即为函数  $g(x)$  和  $h(x) = x$  图象交点的横坐标,

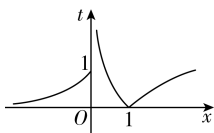
因为  $g(x)$  为奇函数,  $h(x) = x$  也是奇函数, 所以函数  $g(x)$  和  $h(x) = x$  图象交点的横坐标的和为 0,

即方程  $f(f(x)) = x$  的所有实数根之和为 0, 故选 C.

2. B 【解析】令  $t = f(x)$ , 由题意作出  $t = f(x)$



的大致图象如图所示.



由  $t^2 - 2at + 4 = 0$ , 得  $\Delta = 4a^2 - 16$ .

当  $-2 < a < 2$  时,  $\Delta < 0$ , 方程  $t^2 - 2at + 4 = 0$  没有解, 不符合题意;

当  $a = 2$  时, 方程  $t^2 - 2at + 4 = 0$  的解集为  $\{2\}$ , 由图易知直线  $t = 2$  与  $t = f(x)$  的图象仅有 2 个交点, 即原方程有 2 个不等实根, 不符合题意;

当  $a = -2$  时, 方程  $t^2 - 2at + 4 = 0$  的解集为  $\{-2\}$ , 同理, 不符合题意.

当  $a > 2$  时, 方程  $t^2 - 2at + 4 = 0$  有 2 个不相等的实数根  $t_1, t_2$ , 且  $t_1 + t_2 = 2a, t_1 t_2 = 4, t_1 > 0, t_2 > 0$ ;

当  $a < -2$  时, 方程  $t^2 - 2at + 4 = 0$  有 2 个不相等的实数根  $t_3, t_4$ , 且  $t_3 + t_4 = 2a, t_3 t_4 = 4, t_3 < 0, t_4 < 0$ , 由图知直线  $t = t_3, t = t_4$  与  $t = f(x)$  的图象无交点, 不符合题意.

所以方程  $[f(x)]^2 - 2af(x) + 4 = 0$  有 4 个不相等的实数根等价于方程  $t^2 - 2at + 4 = 0$  在  $(1, +\infty)$  有 2 个不等的实根  $t_1, t_2$ .

令  $g(t) = t^2 - 2at + 4$ ,

所以  $\begin{cases} \Delta = (2a)^2 - 4 \times 4 > 0, \\ a > 1, \\ g(1) = 1 - 2a + 4 > 0, \end{cases}$  解得  $2 < a < \frac{5}{2}$ , 所

以实数  $a$  的取值范围是  $\left(2, \frac{5}{2}\right)$ .

**3.  $(0, 1) \cup (2, 3)$  【解析】**作出  $f(x)$  的大致图象, 设  $t = f(x)$ , 则  $f(t) = k$ .

方程  $f(f(x)) = k$  有四个不同的实数根,

当  $k < 0$  时, 由  $f(t) = k$  可得  $t > 5$ , 显然不符合题意.

当  $k = 0$  时, 由  $f(t) = k$  可得  $t = 5$  或  $t = 0$ , 此时, 由图可知  $t = f(x)$  只有两个根 0 和 5, 不符合题意.

当  $0 < k < 1$  时, 由  $f(t) = k$  可得  $t$  有三个解, 不妨设  $t_1 < 0, 0 < t_2 < 1, t_3 > 4$ ,

此时, 由图可知  $t_1 = f(x)$  有一个根,  $t_2 = f(x)$  有三个根,  $t_3 = f(x)$  没有根, 且这四个根互不相等, 符合题意.

当  $k = 1$  时, 由  $f(t) = k$  可得  $t = 1$  或  $t = 4$ , 此时, 由图可知  $t = f(x)$  只有两个根, 为 1 和 4, 不符合题意.

当  $1 < k \leq 2$  时, 由  $f(t) = k$  可得  $t$  有两个根, 不妨设  $1 < t'_1 \leq \log_2 3, 3 \leq t'_2 < 4$ , 此时, 由图可知  $t'_1 = f(x)$  有两个根,  $t'_2 = f(x)$  至多有一个根, 不符合题意.

当  $2 < k < 3$  时, 由  $f(t) = k$  可得  $t$  有两个解,

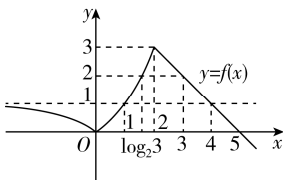


不妨设  $\log_2 3 < t_1'' < 2, 2 < t_2'' < 3$ ,

此时,由图可知  $t_1'' = f(x)$  有两个根,  $t_2'' = f(x)$  也有两个根,且这四个根互不相等,符合题意;

当  $k \geq 3$  时,  $f(t) = k$  至多有一个根,所以  $t = f(x)$  不可能有四个根,不符合题意.

综上,实数  $k$  的取值范围为  $(0, 1) \cup (2, 3)$ .



4. 【解】(1) 由  $F(x) = ax^2 - 2ax + b = a(x-1)^2 + b-a$  ( $a > 0$ ) 可知函数  $F(x)$  的图象开口向上且关于直线  $x = 1$  对称,所以函数  $F(x)$  在  $[1, 2]$  上单调递增,

于是  $\begin{cases} F(1) = 0, \\ F(2) = 1, \end{cases}$  即  $\begin{cases} b-a=0, \\ b=1, \end{cases}$  解得  $a = 1$ ,  $b = 1$ .

(2) 由(1)知  $f(x) = \frac{F(x)}{x} = x + \frac{1}{x} - 2, x > 0$ ,

所以  $f(|\log_3 x|) + \frac{2c}{|\log_3 x|} - 3c - 1 = 0$  即为

$|\log_3 x| + \frac{1}{|\log_3 x|} - 2 + \frac{2c}{|\log_3 x|} - 3c - 1 = 0$ , 且  $x > 0, x \neq 1$ ,

方程转化为  $|\log_3 x|^2 - 3(c+1)|\log_3 x| + 2c + 1 = 0$ ,

令  $|\log_3 x| = \lambda \in (0, +\infty)$ , 即  $\lambda^2 - 3(c+1)\lambda + 2c + 1 = 0$ ,

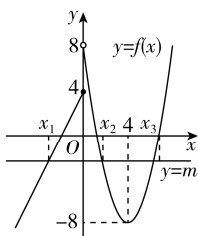
则关于  $x$  的方程  $f(|\log_3 x|) + \frac{2c}{|\log_3 x|} - 3c - 1 = 0$

有四个不同的实数解等价于关于  $\lambda$  的一元二次方程  $\lambda^2 - 3(c+1)\lambda + 2c + 1 = 0$  有两个不相等的正实数根  $\lambda_1, \lambda_2$ ,

则  $\begin{cases} \Delta = 9(c+1)^2 - 4(2c+1) > 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 3(c+1) > 0, \\ \lambda_1 \lambda_2 = 2c+1 > 0, \end{cases}$  解得  $c > -\frac{1}{2}$ , 所

以实数  $c$  的取值范围为  $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ .

5. A 【解析】设  $x_1 < x_2 < x_3$ , 在同一平面直角坐标系内作出直线  $y = m$  及函数  $y = f(x)$  的大致图象如图所示.



设  $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = m$ , 当  $x > 0$  时,



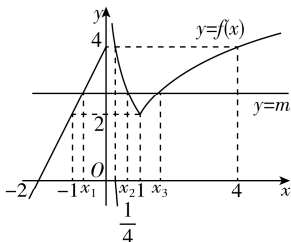
$f(x) = x^2 - 8x + 8 = (x-4)^2 - 8 \geq -8$ , 由图象可知,  $-8 < m \leq 4$ , 则  $f(x_1) = 2x_1 + 4 \in (-8, 4]$ , 可得  $-6 < x_1 \leq 0$ , 由于二次函数  $y = x^2 - 8x + 8$  的图象的对称轴为直线  $x = 4$ , 所以  $x_2 + x_3 = 8$ , 因此  $2 < x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$ . 故选 A.

**6. C** 【解析】在同一平面直角坐标系内作出直线  $y = m$  与  $y = f(x)$  的大致图象, 如图.

函数  $f(x)$  在  $(-\infty, 0]$  上单调递增, 函数值的取值集合为  $(-\infty, 4]$ ;

在  $(0, 1)$  上单调递减, 函数值的取值集合为  $(2, +\infty)$ ; 在  $[1, +\infty)$  上单调递增, 函数值的取值集合为  $[2, +\infty)$ . 由  $f(x) = 2$ , 得  $x = -1$  或  $x = 1$ ; 由  $f(x) = 4$ , 得  $x = 0$  或  $x = \frac{1}{4}$  或  $x = 4$ .

函数  $g(x) = f(x) - m$  恰有 3 个零点  $x_1, x_2, x_3$ ,  $x_3 (x_1 < x_2 < x_3)$ , 即直线  $y = m$  与  $y = f(x)$  的图象有 3 个交点, 且交点的横坐标分别为  $x_1, x_2, x_3$ ,



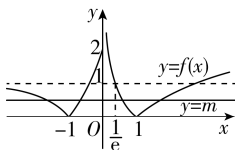
由图知  $2 < m \leq 4$ ,  $-1 < x_1 \leq 0$ ,  $\frac{1}{4} \leq x_2 < 1 < x_3 \leq 4$ ,

由  $f(x_2) = f(x_3)$ , 得  $-\log_2 x_2 = \log_2 x_3$ , 因此

$$x_2 x_3 = 1, x_1 + \frac{1}{x_2 x_3} = x_1 + 1 \in (0, 1],$$

所以  $x_1 + \frac{1}{x_2 x_3}$  的取值范围是  $(0, 1]$ .

**7. BCD** 【解析】对于 A, 在同一平面直角坐标系内作出直线  $y = m$  及  $f(x)$  的大致图象, 如图所示, 由图可知  $0 < m < 1$ , A 错误.



对于 B, 因为  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ , 所以  $3^{x_1+1} - 1 + 3^{x_2+1} - 1 = 0$ ,  $\ln x_3 + \ln x_4 = 0$ ,

$$\text{所以 } 3^{x_1} + 3^{x_2} = \frac{2}{3}, x_3 x_4 = 1, \text{ B 正确.}$$

对于 C, 由图可知  $\frac{1}{e} < x_3 < 1$ , 所以  $2x_3 + x_4 =$

$$2x_3 + \frac{1}{x_3} \geq 2\sqrt{2},$$

当且仅当  $x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $x_4 = \sqrt{2}$  时, 等号成立, C



正确.

对于 D,  $y = x_3 + x_4 = x_3 + \frac{1}{x_3}$  在  $(\frac{1}{e}, 1)$  上单调递减.

因为  $m$  越大,  $x_3$  越小, 所以  $x_3 + x_4$  的值越大, D 正确.

8. (1) 【解】设  $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$ , 由

$$f(1) - f(-1) = a - \frac{1}{a} = 2\sqrt{2},$$

解得  $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$  或  $a = \sqrt{2} - \sqrt{3}$  (舍去), 故  $f(x)$  的解析式为  $f(x) = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^x$ .

(2) ①【解】由 (1) 知  $f(x) = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^x$ , 所以  $g(x) = f(2x) + mf(x) = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2x} + m(\sqrt{3} + \sqrt{2})^x$ . 方程  $g(x) + g(-x) + 14 = 0$  可化为  $[(\sqrt{3} + \sqrt{2})^x + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-x}]^2 + m[(\sqrt{3} + \sqrt{2})^x + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-x}] + 12 = 0$ .

令  $t = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^x + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-x}$ , 则  $t \geq 2$ , 当且仅当  $x = 0$  时, 等号成立.

易知  $y = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^x + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-x}$  为偶函数, 且由对勾函数性质以及  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^x \geq 1 (x \geq 0)$  知  $y = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^x + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-x}$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增, 所以问题转化为  $t^2 + mt + 12 = 0$  有 2 个大于 2 的不相等的实数根.

设  $h(t) = t^2 + mt + 12$ , 则

$$\begin{cases} \Delta = m^2 - 48 > 0, \\ -\frac{m}{2} > 2, \\ h(2) = 2m + 16 > 0, \end{cases} \quad \text{解得 } -8 < m < -4\sqrt{3}, \text{ 所}$$

以实数  $m$  的取值范围是  $(-8, -4\sqrt{3})$ .

②【证明】不妨设  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ . 因为  $y = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^x + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-x}$  为偶函数, 且在  $[0, +\infty)$  上单调递增, 所以  $x_4 = -x_1 > 0$ ,  $x_3 = -x_2 > 0$ . 设  $t_1 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{x_3} + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-x_3}$ ,  $t_2 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{x_4} + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-x_4}$ , 则  $t_1 t_2 = 12$ .

于是  $[(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{x_3} + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-x_3}][(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{x_4} + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-x_4}] = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{x_3+x_4} + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-x_3-x_4} + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{x_3-x_4} + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{x_4-x_3} = 12$ .

因为  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{x_3-x_4} + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{x_4-x_3} > 2$ , 所以  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{x_3+x_4} + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-x_3-x_4} < 10$ .

令  $n = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{x_3+x_4}$ ,  $n > 1$ , 则  $n + \frac{1}{n} < 10$ ,

即  $n^2 - 10n + 1 < 0$ , 解得  $5 - 2\sqrt{6} < n < 5 + 2\sqrt{6}$ .

于是  $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{x_3+x_4} < 5 + 2\sqrt{6}$ , 得  $x_3 + x_4 <$





$$\log_{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}(5+2\sqrt{6})=2.$$

因为  $x_4 = -x_1 > 0, x_3 = -x_2 > 0$ , 所以  $|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| = 2(x_3 + x_4) < 4$ .

## 真题上分

1. 64 【解析】因为  $\frac{1}{\log_8 a} - \frac{1}{\log_a 4} = \frac{3}{\log_2 a} - \frac{1}{2} \cdot \log_2 a = -\frac{5}{2}$ , 所以  $(\log_2 a + 1)(\log_2 a - 6) = 0$ . 又  $a > 1$ , 故  $\log_2 a = 6$ , 解得  $a = 64$ .

2. 1 【解析】 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4^{\frac{1}{2}} + \log_2 \frac{1}{2} = 2 - 1 = 1$ .

3. D 【解析】依题意, 函数  $y = 1.01^x$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 因为  $0 < 0.5 < 0.6$ , 所以  $1 < 1.01^{0.5} < 1.01^{0.6}$ , 即  $a < b$ . 又  $c = 0.6^{0.5} = \sqrt{\frac{6}{10}} = \frac{\sqrt{15}}{5} < 1$ , 所以  $c < a < b$ . 故选 D.

4. D 【解析】由指数函数  $y = 4 \cdot 2^x$  是  $\mathbf{R}$  上的增函数, 又  $0.2 > -0.2$ , 所以  $b > a$ , 函数  $y = 4 \cdot 2^x$  在  $(-\infty, 0)$  上的值域为  $(0, 1)$ , 所以  $0 < a < 1$ .

函数  $y = \log_{4.2} x$  在  $(0, 1)$  上的值域为  $(-\infty, 0)$ , 所以  $c < 0$ .

综上, 可得  $c < a < b$ , 故选 D.

5. B 【解析】由题意知  $\log_2 x = 1 + \log_3 y = 3 + \log_5 z$ ,

令  $\log_2 x = 1 + \log_3 y = 3 + \log_5 z = k$ , 则  $x = 2^k, y = 3^{k-1}, z = 5^{k-3}$ ,

$k$	$x$	$y$	$z$	大小关系	结论
0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{125}$	$x > y > z$	A 正确
3	8	9	1	$y > x > z$	C 正确
6	64	243	125	$y > z > x$	D 正确

提示: 考场上可采用特殊值法快

速得出正确答案 B

下面证明: 选项 B 错误.

若  $x > z$ , 则  $2^k > 5^{k-3}$ , 即  $\left(\frac{5}{2}\right)^k < 5^3$ , 两边同时

取自然对数, 得  $k \ln \frac{5}{2} < 3 \ln 5$ , 即  $k < \frac{3 \ln 5}{\ln \frac{5}{2}}$ ;

若  $z > y$ , 则  $5^{k-3} > 3^{k-1}$ , 即  $\left(\frac{5}{3}\right)^{k-1} > 5^2$ , 两边

同时取自然对数, 得  $(k-1) \ln \frac{5}{3} > 2 \ln 5$ ,

即  $k > \frac{2 \ln 5}{\ln \frac{5}{3}} + 1$  (下面比较  $\frac{3 \ln 5}{\ln \frac{5}{2}}$  和

$\frac{2 \ln 5}{\ln \frac{5}{3}} + 1$  的大小). 因为  $\frac{3 \ln 5}{\ln \frac{5}{2}} - \left(\frac{2 \ln 5}{\ln \frac{5}{3}} + 1\right)$



$$1 \Bigg) = \frac{3\ln 5}{\ln \frac{5}{2}} - \frac{2\ln 5}{\ln \frac{5}{3}} - 1 = \frac{\ln 5 \left( 3\ln \frac{5}{3} - 2\ln \frac{5}{2} \right)}{\ln \frac{5}{2} \ln \frac{5}{3}} - 1,$$

$$\text{因为} \left( \frac{5}{3} \right)^3 - \left( \frac{5}{2} \right)^2 = \frac{125}{27} - \frac{25}{4} = -\frac{175}{108} < 0,$$

$$\text{所以} \left( \frac{5}{3} \right)^3 < \left( \frac{5}{2} \right)^2, \text{即} 3\ln \frac{5}{3} < 2\ln \frac{5}{2}, \text{所}$$

$$\text{以} \frac{3\ln 5}{\ln \frac{5}{2}} < \frac{2\ln 5}{\ln \frac{5}{3}} + 1, \text{所以} k < \frac{3\ln 5}{\ln \frac{5}{2}} \text{与} k >$$

$$\frac{2\ln 5}{\ln \frac{5}{3}} + 1 \text{ 不可能同时成立, 故 B 错误. 故}$$

选 B.

**6. B** 【解析】设  $y = f(x) = \frac{\ln|x|}{x^2+2}$ , 则函数

$f(x)$  的定义域为  $\{x|x \neq 0\}$ , 关于原点对

称, 又  $f(-x) = \frac{\ln|-x|}{(-x)^2+2} = f(x)$ , 所以函数  $f$

$(x)$  为偶函数, 其图象关于  $y$  轴对称, 排除 A, C;

当  $x \in (0, 1)$  时,  $\ln|x| < 0, x^2+2 > 0$ , 所以  $f(x) < 0$ , 排除 D. 故选 B.

**7. B** 【解析】当  $x < 0$  时, 函数  $f(x) = -x^2 - 2ax - a = -(x+a)^2 + a^2 - a$ , 若函数  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递增, 则有  $-a \geq 0$ , 即  $a \leq 0$ ;

当  $x \geq 0$  时, 函数  $f(x) = e^x + \ln(x+1)$ , 函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增.

因为函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 所以  $-a \leq e^0 + \ln(0+1) = 1$ , 解得  $a \geq -1$ .

综上所述可得  $-1 \leq a \leq 0$ . 故选 B.

**快解**

当  $a = 1$  时,  $f(x) =$

$$\begin{cases} -(x+1)^2, & x < 0, \\ e^x + \ln(x+1), & x \geq 0, \end{cases} \text{显然函数 } f(x) =$$

$-(x+1)^2$  在  $(-\infty, 0)$  上不单调, 排除

C 选项和 D 选项; 当  $a = -2$  时,  $f(x) =$

$$\begin{cases} -(x-2)^2 + 6, & x < 0, \\ e^x + \ln(x+1), & x \geq 0, \end{cases} \text{当 } x \text{ 从 } 0 \text{ 的左侧}$$

趋近于 0 时,  $f(x) \rightarrow 2$ , 而  $f(0) = 1$ , 所以函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上不单调, 排除 A.

故选 B.

**8. D** 【解析】注意到  $g(0) = 0$ , 所以要使

$g(x)$  恰有 4 个零点, 则方程  $|kx-2| = \frac{f(x)}{|x|}$

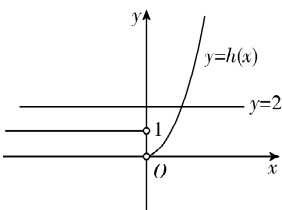
恰有 3 个实数解, 令  $h(x) = \frac{f(x)}{|x|}, x \neq 0$ , 即



$y = |kx - 2|$  与  $h(x) = \frac{f(x)}{|x|}$  的图象有 3 个不同交点.

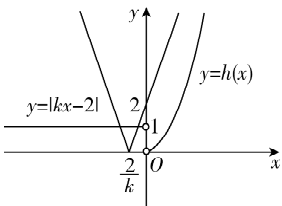
$$h(x) = \frac{f(x)}{|x|} = \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ 1, & x < 0, \end{cases}$$

当  $k = 0$  时,  $y = 2$ , 如图①,  $y = 2$  与  $h(x) = \frac{f(x)}{|x|}$  的图象有 1 个交点, 不满足题意;



图①

当  $k < 0$  时, 如图②, 此时  $y = |kx - 2|$  与  $h(x) = \frac{f(x)}{|x|}$  的图象恒有 3 个不同交点, 满足题意;

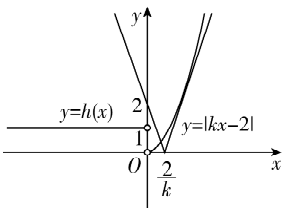


图②

当  $k > 0$  时, 如图③, 当  $y = kx - 2$  与  $y = x^2$  的图象相切时, 可得  $x^2 - kx + 2 = 0$ ,

令  $\Delta = 0$  得  $k^2 - 8 = 0$ , 解得  $k = 2\sqrt{2}$  (负值舍去), 所以  $k > 2\sqrt{2}$ .

综上,  $k$  的取值范围为  $(-\infty, 0) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$ . 故选 D.



图③

## 9. $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$



### 思路导引

令  $x^2 - ax + 1 = 0$

判别式的正负

→ 判断  $x^2 - ax + 1$  的正负

分类讨论去绝对值, 化简  $f(x)$  的解析

式  $f(x)$  有且仅有两个零点

→  $a$  的取值范围

【解析】令  $x^2 - ax + 1 = 0$ , 则  $\Delta_1 = a^2 - 4$ ,

当  $-2 \leq a \leq 2$  时,  $\Delta_1 \leq 0$ ,  $x^2 - ax + 1 \geq 0$  恒成立, 此时  $f(x) = (a-1)x^2 + (a-2)x - 1$ .

当  $a \neq 1$  时, 令  $f(x) = (a-1)x^2 + (a-2)x - 1 = 0$ , 则  $\Delta_2 = (a-2)^2 + 4(a-1) = a^2$ , 当  $a \neq$



0 时,  $\Delta_2 > 0$ ,  $f(x)$  有且仅有两个零点;

当  $a = 1$  时,  $f(x) = -x - 1$ ,  $f(x)$  有且仅有一个零点, 不符合题意,

所以  $-2 \leq a < 0$  或  $0 < a < 1$  或  $1 < a \leq 2$ .

当  $a < -2$  或  $a > 2$  时,  $\Delta_1 > 0$ , 方程  $x^2 - ax + 1 = 0$  有两个不等实根,

设为  $x_1, x_2, x_1 < x_2$ , 所以  $f(x) = \begin{cases} [(a+1)x-1](x-1), & x_1 \leq x \leq x_2, \\ [(a-1)x-1](x+1), & x < x_1 \text{ 或 } x > x_2. \end{cases}$

设  $g(x) = [(a+1)x-1](x-1)$ , 令  $g(x) =$

0, 解得  $x = 1$  或  $x = \frac{1}{a+1}$ ; 设  $h(x) = [(a-1)$

$x-1](x+1)$ , 令  $h(x) = 0$ , 解得  $x = -1$  或

$x = \frac{1}{a-1}$ .

当  $a < -2$  时,  $x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} < -1, -1 < \frac{1}{a+1} <$

$x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} < \frac{1}{a-1} < 0$ , 所以  $f(x)$  有且仅

有两个零点, 符合题意.

当  $a > 2$  时, 因为  $x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} > 1$ , 且  $0 <$

$\frac{1}{a+1} < x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} < \frac{1}{a-1} < 1$ , 所以  $f(x)$  有

且仅有两个零点, 符合题意.

综上所述,  $a$  的取值范围为  $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ .

10. D 【解析】由题意可得 
$$\begin{cases} 2. 1 = \frac{S-1}{\ln N_1}, \\ 3. 15 = \frac{S-1}{\ln N_2}, \end{cases}$$

两式相除得  $2. 1 \ln N_1 = 3. 15 \ln N_2$ ,

即  $\ln N_1^{2.1} = \ln N_2^{3.15}$ , 所以  $N_1^{2.1} = N_2^{3.15}$ . 结合选项可知, 选 D.



## 第四章 全章上分

1. D 【解析】原式  $= \frac{2^{2n+2} \cdot 2^{-2n-1}}{(2^2)^n \cdot (2^3)^{-2}} = \frac{2^1}{2^{2n-6}} =$

$$2^{7-2n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-7}. \text{ 故选 D.}$$

2. B 【解析】函数  $y = \ln t$  在定义域上单调递增, 由题意可得  $t = ax - x^2$  在区间  $[2, 3]$  上单调递减, 且  $ax - x^2 > 0$  在区间  $[2, 3]$  上恒成立.

又  $t = ax - x^2 = -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}$ , 故需使  $\frac{a}{2} \leq 2$ , 解得  $a \leq 4$ .

由  $ax - x^2 > 0$  在区间  $[2, 3]$  上恒成立, 得  $a > 3$ .

综上, 可得  $3 < a \leq 4$ .

故选 B.

3. B 【解析】当  $a > 1$  时,  $0 < \frac{1}{a} < 1$ ,  $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$

是减函数,  $y = \log_a x$  是增函数, 直线  $y = x + a$  与  $y$  轴的交点的纵坐标大于 1, 此时没有图象满足;

当  $0 < a < 1$  时,  $\frac{1}{a} > 1$ ,  $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$  是增函数,  $y = \log_a x$  是减函数, 直线  $y = x + a$  与  $y$  轴的交点的纵坐标在 0 与 1 之间, 此时图象 B 满足.

4. A 【解析】依题意,  $\Delta L_2 - \Delta L_1 =$

$$10 \lg \left( \frac{1}{4\pi r_2^2} \right) - 10 \lg \left( \frac{1}{4\pi r_1^2} \right) = 10 \lg \left( \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) =$$

$$20 \lg \frac{r_1}{r_2} = -20 \lg 2 \approx -6 (\text{dB}). \text{ 故选 A.}$$

5. B 【解析】由函数  $y = \log_{1.6} x$  单调递增, 得

$a = \log_{1.6} 0.8 < \log_{1.6} 1 = 0$ , 由  $y = 1.6^x$  单调递增, 得  $b = 1.6^{0.8} > 1.6^0 = 1$ , 由  $y = 0.8^x$  单调递减, 得  $0 < 0.8^{1.6} < 0.8^0 = 1$ , 即  $0 < c < 1$ , 所以  $a < c < b$ . 故选 B.

6. C 【解析】令  $g(x) = 2^x - 2^{-x} + \ln \frac{1+x}{1-x}$ , 则

$$f(x) = g(x) + 1, \text{ 由 } \frac{1+x}{1-x} > 0, \text{ 解得 } x \in (-1, 1).$$

因为  $y = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln \left( -1 + \frac{2}{1-x} \right)$ ,  $y = 2^x$ ,  $y = -2^{-x}$  都在  $(-1, 1)$  上单调递增, 所以  $g(x)$  在  $(-1, 1)$  上单调递增.

因为  $g(-x) = 2^{-x} - 2^x + \ln \frac{1-x}{1+x} = - \left( 2^x - 2^{-x} + \ln \frac{1+x}{1-x} \right)$ , 所以  $g(-x) = -g(x)$ ,



因为  $f(a) + f(1+a) > 2$ , 所以  $g(a) + 1 + g(1+a) + 1 > 2$ , 即  $g(a) + g(1+a) > 0$ , 所以  $g(a) > -g(1+a) = g(-1-a)$ , 所以  $1 > a > -1-a > -1$ , 所以  $-\frac{1}{2} < a < 0$ . 故选 C.

**7. ACD** 【解析】对于 A, 因为  $2x + \ln x = \ln(1-y) - 2y$ , 由对数函数的定义可得  $x > 0$ ,  $1-y > 0$ , 即  $-x < 0, y < 1$ , 所以  $y-x < 1$ , A 正确.

对于 B, D,  $2x + \ln x = 2(1-y) + \ln(1-y) - 2 < 2(1-y) + \ln(1-y)$ , 即  $2x + \ln x < 2(1-y) + \ln(1-y)$ .

构造函数  $f(x) = 2x + \ln x (x > 0)$ , 因为  $y = 2x, y = \ln x$  在  $(0, +\infty)$  上都单调递增, 所以函数  $f(x) = 2x + \ln x$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增.

由  $2x + \ln x < 2(1-y) + \ln(1-y)$  可得  $f(x) < f(1-y)$ , 所以  $x < 1-y$ , 所以  $x+y < 1$ , B 错误, D 正确.

对于 C, 因为  $x > 0, 1-y > 0, x < 1-y$ , 所以  $x^2 < (y-1)^2$ , C 正确. 故选 ACD.

**8. CD** 【解析】对于 A, 当  $a = 0, b = 1$  时,

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4x+3} + 1$ , 将  $x = \frac{1}{4}$  代入  $f(x)$  可

得,  $f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4 \times \frac{1}{4} + 3} + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$ , 所以函数图象不经过点

$\left(\frac{1}{4}, 2\right)$ , A 错误.

对于 B, 当  $a = 1$  时,  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x+3} + b$ ,

令  $t = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$ , 二次函数  $t = (x-2)^2 - 1$  在区间  $(2, +\infty)$  上单调递增.

又指数函数  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$  是定义域上的减函数, 根据复合函数“同增异减”的原则, 可知  $f(x)$  在区间  $(2, +\infty)$  上单调递减, B 错误.

对于 C, 当  $a = b = 1$  时,  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x+3} + 1$ ,  $t = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1 \geq -1$ .

当  $t \geq -1$  时,  $0 < \left(\frac{1}{2}\right)^t \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$ , 则  $1 < \left(\frac{1}{2}\right)^t + 1 \leq 3$ , 即函数  $f(x)$  的值域为  $(1, 3]$ , C 正确.

对于 D, 当  $b = 0$  时,  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{ax^2-4x+3}$ .

若  $a = 0$ , 则  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4x+3}$ , 此时函数无最大值.



若  $a \neq 0$ , 令  $m = ax^2 - 4x + 3$ , 要使  $f(x)$  有最大值 2, 则  $m$  有最小值, 且当  $m$  取最小值时,  $f(x)$  取最大值.

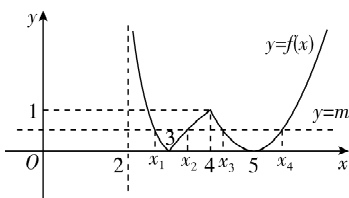
对于二次函数  $m = ax^2 - 4x + 3$ , 其图象的对称轴为直线  $x = \frac{2}{a}$  ( $a \neq 0$ ), 则  $a > 0$ , 且当  $x = \frac{2}{a}$  时,  $m$  取得最小值  $3 - \frac{4}{a}$ .

因为  $f(x)$  的最大值为 2, 即  $\left(\frac{1}{2}\right)^{3 - \frac{4}{a}} = 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ , 所以  $3 - \frac{4}{a} = -1$ , 解得  $a = 1$ , D 正确. 故选 CD.

9. ABD 【解析】因为  $y = f(x) - m$  有 4 个不同的零点  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , 且  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ , 所以  $f(x)$  与  $y = m$  的图象有 4 个不同的交点, 其横坐标从左到右依次为  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

又  $f(x) = \begin{cases} |\log_2(x-2)|, & 2 < x \leq 4, \\ x^2 - 10x + 25, & x > 4, \end{cases}$  利用对数

函数与二次函数的性质作出  $f(x)$  的大致图象, 如图.



对于 A, 结合图象可知  $0 < m < 1$ ,  $x_1 < 3 < x_2$ , 故 A 正确;

对于 B, 因为  $x_1 < 3 < x_2$ , 所以  $-\log_2(x_1 - 2) = \log_2(x_2 - 2)$ , 即  $\log_2(x_1 - 2) + \log_2(x_2 - 2) = 0$ , 所以  $\log_2[(x_1 - 2)(x_2 - 2)] = 0$ , 即  $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = 1$ , 即  $x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4 = 1$ , 所以  $2(x_1 + x_2) = x_1x_2 + 3$ , 故 B 正确;

对于 C, 由二次函数图象的对称性可知,  $x_3 + x_4 = 2 \times 5 = 10$ , 故 C 错误;

对于 D,  $(x_1 - 2)(x_2 - 2)(x_3 + x_4) = 1 \times 10 = 10$ , 故 D 正确. 故选 ABD.

10.  $(-1, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$  【解析】由函数  $f(x-1)$  的定义域为  $(-1, 3)$ , 得  $-1 < x < 3$ , 则  $-2 < x-1 < 2$ ,

对于  $g(x)$ , 由  $\begin{cases} -2 < 2x+1 < 2, \\ x+1 > 0, \\ x+1 \neq 1, \end{cases}$  解得  $-1 < x < 0$

或  $0 < x < \frac{1}{2}$ , 所以函数  $g(x)$  的定义域为

$(-1, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$ .



11.  $-\frac{1}{2}$  【解析】函数  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ , 当  $0 < x < 1$  时,  $\ln x < 0$ , 当  $x = 1$  时,  $\ln x = 0$ , 当  $x > 1$  时,  $\ln x > 0$ , 要使  $f(x) \geq 0$ , 则在  $(0, 1)$  上  $y = x^2 + ax + b < 0$ , 在  $(1, +\infty)$  上  $y = x^2 + ax + b > 0$ .

所以  $x = 1$  为该二次函数在  $(0, +\infty)$  上的唯一零点, 易得  $b = -a - 1$ .

$y = x^2 + ax - (a + 1) = (x - 1)[x + (a + 1)]$ , 且其图象开口向上, 所以  $-(a + 1) \leq 0$ , 即  $a + 1 \geq 0$ , 则  $a \geq -1$ , 所以  $b^2 - \frac{1}{2}a^2 = (-1 -$

$a)^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}(a + 2)^2 - 1$ , 当  $a = -1$  时,

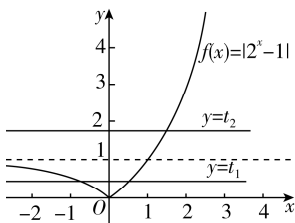
$b^2 - \frac{1}{2}a^2$  取得最小值  $-\frac{1}{2}$ .

12.  $(2, +\infty)$  【解析】由题知函数  $f(x) = |2^x - 1|$ , 作出  $f(x)$  的大致图象如图所示, 关于  $x$  的方程  $[f(x)]^2 - af(x) + 1 = 0$  恰有 3 个不同的实数根, 令  $t = f(x)$ , 根据图象可得,  $t^2 - at + 1 = 0$  有 2 个不同的实数根, 设两根为  $t_1, t_2$ , 且  $t_1 < t_2$ , 显然  $t_1, t_2$  均不为 0, 故只能  $t_1 \in (0, 1), t_2 \in [1, +\infty)$ .

记  $g(t) = t^2 - at + 1$ , 则  $\Delta = a^2 - 4 > 0$ , 即  $a > 2$  或  $a < -2$ , 又  $g(0) = 1 > 0$ , 故  $g(1) < 0$  或

$\begin{cases} g(1) = 0, \\ \frac{a}{2} < 1 \end{cases}$  (无解), 故  $a > 2$ , 所以实数

$a$  的取值范围为  $(2, +\infty)$ .



13. 【解】(1)  $\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} - \left(\frac{49}{9}\right)^{0.5} + (0.008)^{-\frac{2}{3}} \times \frac{2}{25} + (\pi - 1)^0$

$$= \left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\right]^{-\frac{2}{3}} - \left[\left(\frac{7}{3}\right)^2\right]^{0.5} + [(0.2)^3]^{-\frac{2}{3}} \times \frac{2}{25} + 1$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} - \frac{7}{3} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \times \frac{2}{25} + 1$$

$$= \frac{4}{9} - \frac{7}{3} + 25 \times \frac{2}{25} + 1$$

$$= \frac{4}{9} - \frac{7}{3} + 3 = \frac{10}{9}.$$

(2)  $\log_5 35 - 2 \log_{0.5} \sqrt{2} - \log_5 \frac{1}{50} - \log_5 14 -$





$$5^{\log_5 3} + \log_3 2 \cdot \log_2 9$$

$$= \log_5 35 + 1 + \log_5 50 - \log_5 14 - 3 + \frac{\lg 2}{\lg 3} \cdot$$

$$\frac{\lg 9}{\lg 2}$$

$$= \log_5 \frac{35 \times 50}{14} - 2 + \frac{\lg 2}{\lg 3} \cdot \frac{2 \lg 3}{\lg 2}$$

$$= \log_5 125 - 2 + 2$$

$$= \log_5 5^3 = 3.$$

14. 【解】(1) 设该锂矿每年的开采率为  $a$  ( $0 <$

$a < 1$ ), 锂矿石开采的总量为  $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)M$

吨, 则剩余的锂矿石为  $\frac{\sqrt{2}}{2}M$  吨, 所以  $M$

$(1-a)^6 = \frac{\sqrt{2}}{2}M$ , 即  $(1-a)^6 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 解得  $a =$

$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{12}}$ , 故该锂矿每年的开采率为

$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{12}}$ .

(2) 该锂矿今后继续开采  $n$  年后, 剩余的

锂矿石为  $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-a)^n M$  吨.

由题意知,  $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-a)^n \geq \frac{1}{8}$ , 得  $(1-a)^n \geq$

$\frac{\sqrt{2}}{8}$ , 即  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{12}} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$ .

又因为  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  是减函数, 所以  $\frac{n}{12} \leq$

$\frac{5}{2}$ , 得  $n \leq 30$ , 所以该锂矿今后最多还能

开采 30 年.

15. (1) 【解】由题意可得  $\begin{cases} 5+x>0, \\ 5-x>0, \end{cases}$  得  $-5 < x <$

$5$ ,  $\therefore h(x)$  的定义域为  $(-5, 5)$ .

当  $a=5$  时,  $h(x) = f(x) + g(x) = \log_5(25 - x^2)$ ,

$\because 0 < 25 - x^2 \leq 25$ ,  $\therefore \log_5(25 - x^2) \leq \log_5 25 = 2$ ,  $\therefore h(x)$  的值域为  $(-\infty, 2]$ .

(2) 【证明】 $M = \{x \mid f(ax) > 2g(x)\}$ ,

由  $f(ax) > 2g(x)$ , 得  $\log_a(5+ax) > 2\log_a(5-x)$ ,  $\therefore \log_a(5+ax) > \log_a(5-x)^2$ .

又  $\because a > 1$ ,  $\therefore 5+ax > (5-x)^2$ .

由  $\begin{cases} 5+ax>0, \\ 5-x>0 \end{cases}$  得  $-\frac{5}{a} < x < 5$ .

要证明  $M \neq \emptyset$ , 即证  $5+ax > (5-x)^2$  在

$\left(-\frac{5}{a}, 5\right)$  上有解, 即证  $5+ax > 25 - 10x +$

$x^2$ , 即  $x^2 - (a+10)x + 20 < 0$  在  $\left(-\frac{5}{a}, 5\right)$  上



有解.

设  $M(x) = x^2 - (a+10)x + 20$ ,  $\because a > 1, \therefore$

$\frac{a+10}{2} > \frac{11}{2} > 5, \therefore$  只需证  $M(5) < 0$ .

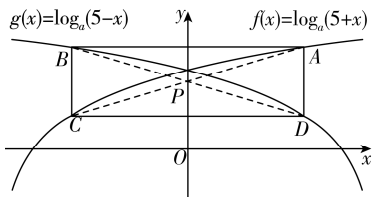
$\because M(5) = 25 - 5(10+a) + 20 = -5 - 5a < 0$ ,

$\therefore 5+ax > (5-x)^2$  在  $\left(-\frac{5}{a}, 5\right)$  上有解, 即

$M \neq \emptyset$  得证.

(3)【解】如图, 连接  $AC, BD$ ,  $AC$  与  $BD$  的交点即为点  $P$ .

$\because f(-x) = \log_a(5-x) = g(x), \therefore f(x)$  与  $g(x)$  的图象关于  $y$  轴对称, 由题意可知, 矩形  $ABCD$  关于  $y$  轴对称,  $\therefore s=0, a^s=1$ .



设点  $A$  的坐标为  $(x_0, \log_a(5+x_0))$  ( $x_0 > 0$ ),  $\because ABCD$  为矩形且  $AB \parallel x$  轴,

$\therefore AD \parallel y$  轴, 点  $D$  的坐标为  $(x_0, \log_a(5-x_0))$ , 又矩形  $ABCD$  关于  $y$  轴对称,  $\therefore$  点  $B$  的横坐标为  $-x_0$ , 同理可得点  $C$  的坐标为  $(-x_0, \log_a(5-x_0))$ .

$\because AD=t$ , 且该矩形的中心为点  $P(s, t)$ ,

$$\therefore \begin{cases} \log_a(5+x_0) - \log_a(5-x_0) = t, \\ \log_a(5+x_0) + \log_a(5-x_0) = 2t, \end{cases}$$

消去  $t$  得  $\log_a(5+x_0) = 3 \log_a(5-x_0)$ ,

则  $5+x_0 = (5-x_0)^3$ , 则  $5+x_0 = 125 + 15x_0^2 - 75x_0 - x_0^3$ , 即  $x_0^3 - 15x_0^2 + 76x_0 - 120 = 0$ ,

可得  $(x_0 - 3)(x_0^2 - 12x_0 + 40) = (x_0 - 3)[(x_0 - 6)^2 + 4] = 0, \therefore x_0 = 3, \therefore t = \log_a(5+x_0) - \log_a(5-x_0) = \log_a 8 - \log_a 2 = \log_a 4$ , 故

$$a^s + a^t = 1 + a^{\log_a 4} = 1 + 4 = 5.$$